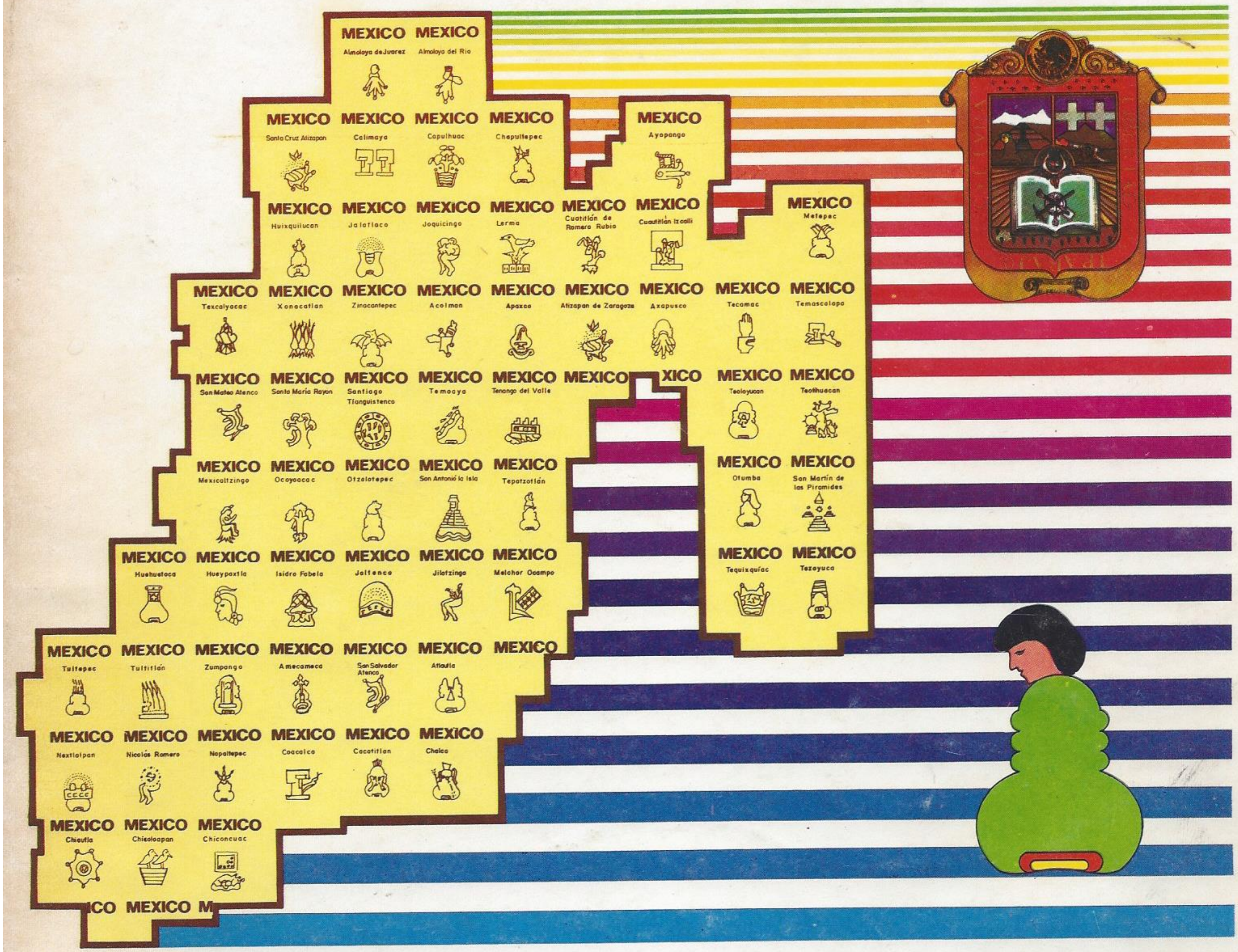
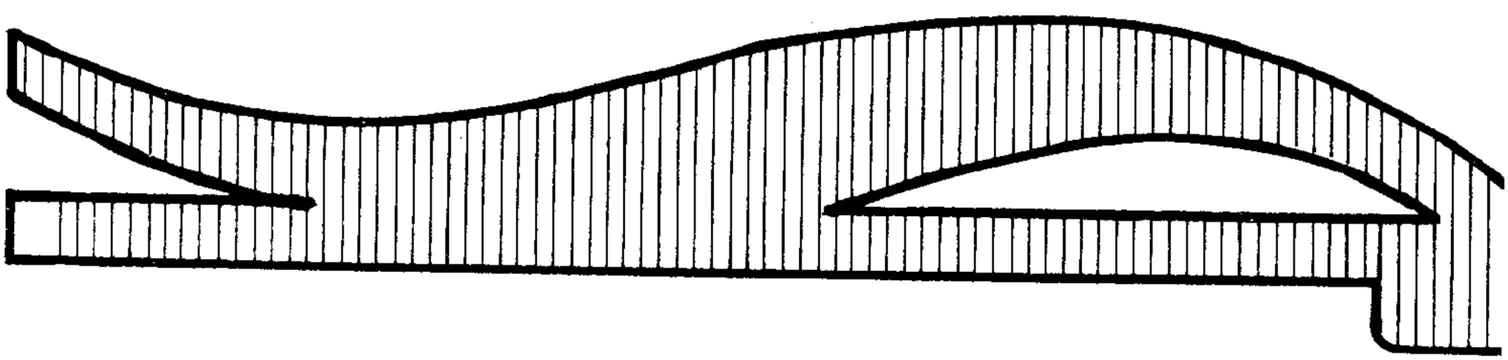


MATEMATICAS

Tercer Curso



Este libro fue elaborado por la COMISION DE LIBROS DE TEXTO, organismo dependiente de la Subdirección Técnica de la Secretaría de Educación, Cultura y Bienestar Social del Gobierno del Estado de Mexico.

ES UN TEXTO EXPERIMENTAL Y GRATUITO.

COORDINACION: Alberto Alonzo Alvarez.

REDACCION: Alfonso Avila Aguirre, Ma. Esther Cedillo Monroy, Héctor Corte Trujillo, Francisco García Reyes Roberto Gómez Hernández, Efraín López Estrada, Margarita Medina Zepeda, Sonia Ma. del Carmen Monroy Galindo, Fernando Orihuela Garfias, Jesús B. Osorno Zarco, Gerardo Parra Cruz.

REVISION TECNICA: Pablo Barrera Sánchez, Arturo Fregoso Urbina, Leticia P. Brambila, Fernando Galaz Fuentes, Constancio Hernández García, Eduardo Rivera Campo, Ernesto Pérez Chavela.

ILUSTRACION: Beatriz Elena Cedillo Monroy.

FOTOGRAFIA: Armando Quintero Plaza.

DISEÑO Y EDICION: Jesús Alonso Alvarez, Esaú Avila González, Adolfo Vázquez Briones.

MECANOGRAFIA: Graciela Arellano Medina, Rebeca Verónica García Rodríguez, María Lourdes Martínez Cipriano.

PROLOGO

La presente obra es producto del esfuerzo de Autoridades Gubernamentales y Educativas del Estado de México, con el propósito de elevar la calidad de la educación; acción que se contempla en el Plan General de Desarrollo de la Entidad.

La importancia de elaborar obras de este tipo, específicas para nuestro Estado, radica en las metas que las Autoridades Educativas han establecido con objeto de implementar recursos que permitan impulsar la educación como aspecto prioritario y que se resume en acciones precisas, como:

- Aprovechar los recursos humanos y materiales de la Entidad.
- Elevar la calidad académica.
- Proporcionar material de apoyo a los profesores.
- Favorecer la educación integral.
- Propiciar la interrelación disciplinaria.
- Disminuir índices de reprobación y deserción.
- Propiciar actitudes de identificación de los mexiquenses con su entidad.

La población a la que esta obra se dirige, está constituída por los alumnos de las secundarias generales y técnicas del Estado de México; por lo que en su elaboración se ha pretendido usar un lenguaje sencillo, con una secuencia lógica, variedad de ejemplos y ejercicios y además, adaptado a la problemática de la Entidad.

Está formada por cinco partes, una por cada área (Español, Matemáticas, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales e Inglés), e interrelacionadas entre sí; por lo que es frecuente encontrar contenidos de determinadas áreas en el desarrollo de alguna otra.

Es un esfuerzo editorial que forma parte de un proceso cuya finalidad es la elavoración de Libros de Texto, para el nivel Medio Básico en el Estado de México; y su característica fundamental, es la fase experimental por medio de la cual se enriquecerá a través de las opiniones, críticas y comentarios de los profesores y alumnos involucrados en este proceso; por lo que, será de gran valor la participación activa de éstos.

Los autores, profesores en servicio del nivel medio básico agradecen la colaboración y apoyo de las Autoridades, Asesores Técnicos, Dibujantes, Fotógrafos y Personal de Mecanografía, que hicieron posible la realización de esta obra.

CONTENIDO

unidad 1

lógica y conjuntos

" EL DESEO DE SABER Y DE
SUPERACIÓN ES INNATO EN
EL CORAZÓN DEL HOMBRE "

BENITO JUAREZ . .

I N T R O D U C C I O N

Con objeto de tener un marco de referencia para el estudio de la matemática, los antiguos griegos se adentraron en el terreno de la lógica en forma sistemática. Sin embargo, después de este período el desarrollo de la lógica languideció por aproximadamente dos milenios. El nombre con que se conoce esta lógica es el de "Lógica Aristotélica" debido a que Aristóteles (siglo IV A.C.), elaboró una lista de 14 silogismos que, según él, resumían las ideas principales de la lógica.

Estos silogismos fueron ejemplo de todas las formas conocidas de obtener una conclusión a partir de dos proposiciones dadas.

Un ejemplo de silogismo:

(1) Todos los héroes son hombres.

(2) Todos los hombres son mortales.

Por lo tanto,

(3) Todos los héroes son mortales.

A esos 14 silogismos, los lógicos de la Edad Media agregaron otros cinco. Estudiar lógica, esencialmente, significaba estudiar estos 19 silogismos.

Después, en 1848, el matemático inglés George Boole (1815-1864) publicó un libro en el que usó símbolos para facilitar el estudio de la lógica, en forma similar a como se usan los símbolos en el álgebra. Más aún, Boole organizó el estudio de la lógica en forma de un sistema deductivo.

De la manera en que el álgebra es el estudio de las formas en que podemos operar y relacionar números; la lógica simbólica es el estudio de las formas en que podemos operar (obtener nuevas proposiciones a partir de otras) y relacionar proposiciones.

En esta unidad, estudiaremos:

a) Proposiciones compuestas de la forma $a \rightarrow b$ y $a \leftrightarrow b$ conocidas con el nombre de condicional y bicondicional respectivamente.

b) La relación de implicación (o deducción) en el conjunto de proposiciones y

c) La conexión entre la condicional y la bicondicional con las relaciones de inclusión e igualdad de conjuntos.

El estudio de estos contenidos te será de utilidad, debido a que gran cantidad de afirmaciones en Matemáticas y en las demás ciencias son de la forma: "Si ..., entonces ..." por lo que frecuentemente encontrarás expresiones de este tipo y requerirás un manejo apropiado de ellas.

OBJETIVOS PARTICULARES:

* Interpretará proposiciones compuestas, utilizando implicación y equivalencia

* Representará, mediante diagramas de Venn, las relaciones lógicas de implicación y equivalencia

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Relacionará proposiciones, mediante la implicación "si p, entonces q".

- Representará la inclusión de conjuntos por medio de diagramas de Venn.

- Relacionará proposiciones mediante la equivalencia.

- Representará la igualdad de conjuntos, por medio de diagramas de Venn.

PROPOSICIONES COMPUESTAS Y SUS TABLAS DE VERDAD.

En la primera unidad del Segundo Curso de Matemáticas, estudiamos proposiciones compuestas, que son proposiciones que se obtienen a partir de proposiciones simples al enlazar éstas con los términos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$; que se leen "y" , "o" "si ..., entonces ..." y ' ... si, y sólo si ..." , respectivamente.

Las siguientes proposiciones se obtienen de proposiciones simples:

a : "No estoy de buen humor" ,

b : "Hoy es domingo y saldré de paseo",

c : "Estudia o bajarás de calificación en el examen" ,

d : "Si no estudias, entonces bajarás de calificación en el examen"

e : "Juan aprueba el curso si, y solo si, obtiene una calificación mayor que 6"

Analicemos cada una de ellas:

1o. La proposición **a** es la negación de la proposición:

"Estoy de buen humor"

2o. La proposición **b** es una conjunción, cuyas componentes son las proposiciones simples:

"Hoy es domingo" y "Saldré de paseo"

3o. La proposición **c** es una disyunción, cuyas componentes son las proposiciones simples:

"Estudias" y "Bajarás de calificación en el examen"

4o. La proposición **d** es una condicional, cuyas componentes son las proposiciones simples:

"No estudias" y "Bajarás de calificación en el examen"

5o. La proposición **e** es una bicondicional, cuyas componentes son las proposiciones simples:

"Juan aprueba el curso" y "Juan obtiene una calificación mayor que 6"

En el curso anterior, establecimos, también, que:

1. Para la negación:

Si una proposición es verdadera, su negación es falsa. Si una proposición es falsa, su negación es verdadera

p	~p
V	F
F	V

2. Para la conjunción:

Una conjunción es verdadera sólo en el caso de que sus componentes lo sean simultá neamente.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. Para la disyunción:

Una disyunción es falsa sólo en el caso de que sus componentes lo sean simultá neamente

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. Para la condicional:

Una condicional es falsa sólo en el caso de que su antecedente sea verda dera y su consecuente -- falsa

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. Para la bicondicional:

Una bicondicional es verda dera sólo en el caso de - que sus componentes tengan simultáneamente el mismo - valor de verdad.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplos:

Supongamos que son verdaderas las proposiciones simples siguientes:

a: "Francisco es alto"

b: "Luis es bajo"

Con esta información y de acuerdo a las reglas para calificar proposiciones a - partir de los valores de verdad de cada una de sus componentes, podemos calificar las siguientes proposiciones.

o: "Francisco no es alto"

p: "Francisco es alto o Luis es bajo"

q: "Francisco y Luis son altos:

r: "O Francisco o Luis son bajos"

s: "Ni Francisco ni Luis son altos"

t: "Si Francisco es alto, entonces Luis es bajo"

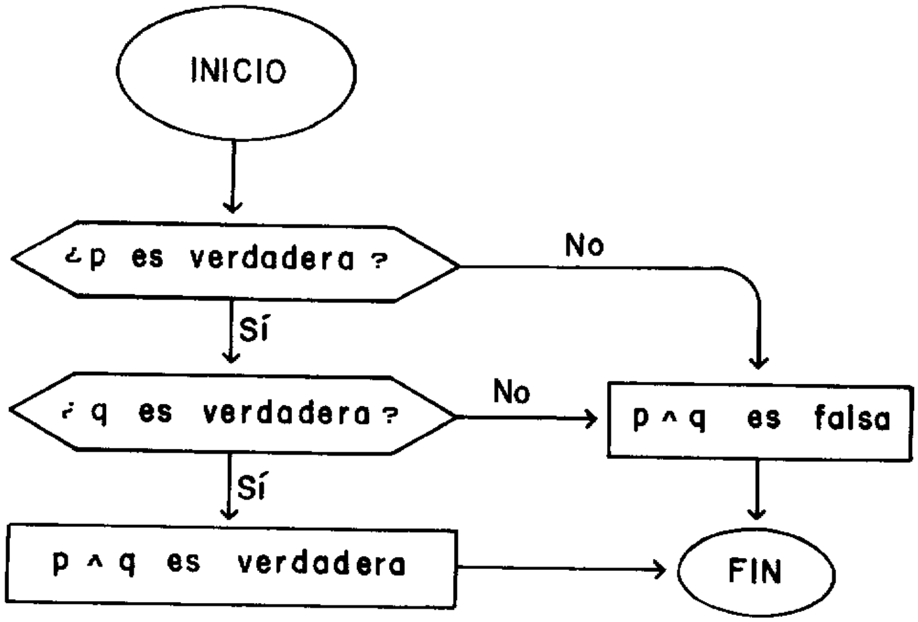
u: "Francisco es alto si,y sólo si,Luis es alto"

Los valores de verdad de cada una de las proposiciones anteriores son como se - indica a continuación.

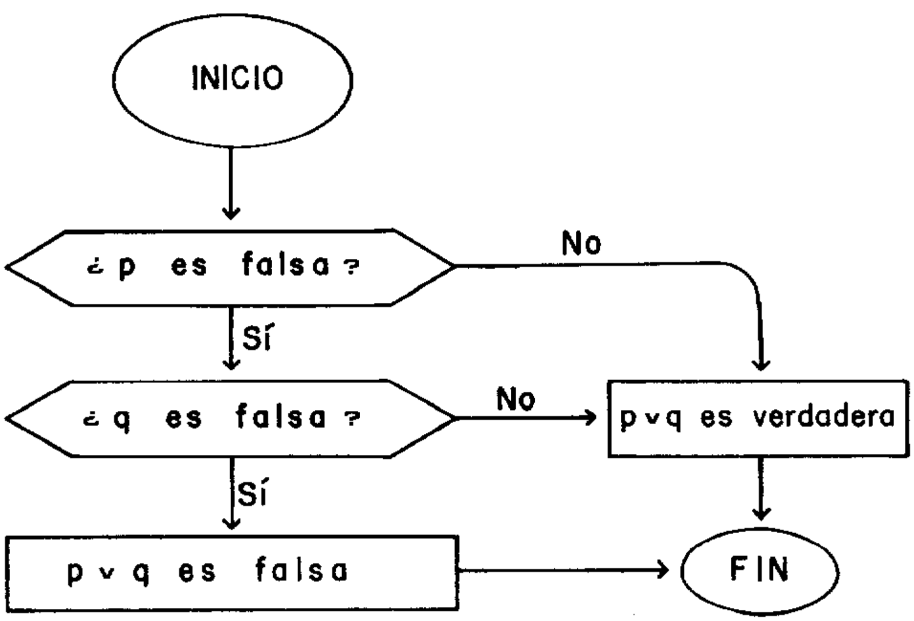
1o. o es falsa	Porque es la negación de una proposición verdadera
2o. p es verdadera	Porque es una disyunción y sus dos compo nentes son verdaderos -de hecho, bastaba que una de éstas fuese verdadera para -- que p también lo fuera.
3o. q es falsa	Porque es una conjunción con una de sus componentes falsa
4o. r es verdadera	Es el mismo caso de p
5o. s es falsa	Porque es una conjunción con una de sus componentes falsa.
6o. t es verdadera	Ya que es una condicional cuyo anteceden te y consecuente son verdaderos.
7o. u es falsa	Ya que es una bicondicional cuyos compo- nentes tienen valores de verdad diferen- tes.

Los dibujos a continuación corresponden a diagramas de flujo para determinar la veracidad o falsedad de: (1) una conjunción, (2) una disyunción y (3) una condicional.

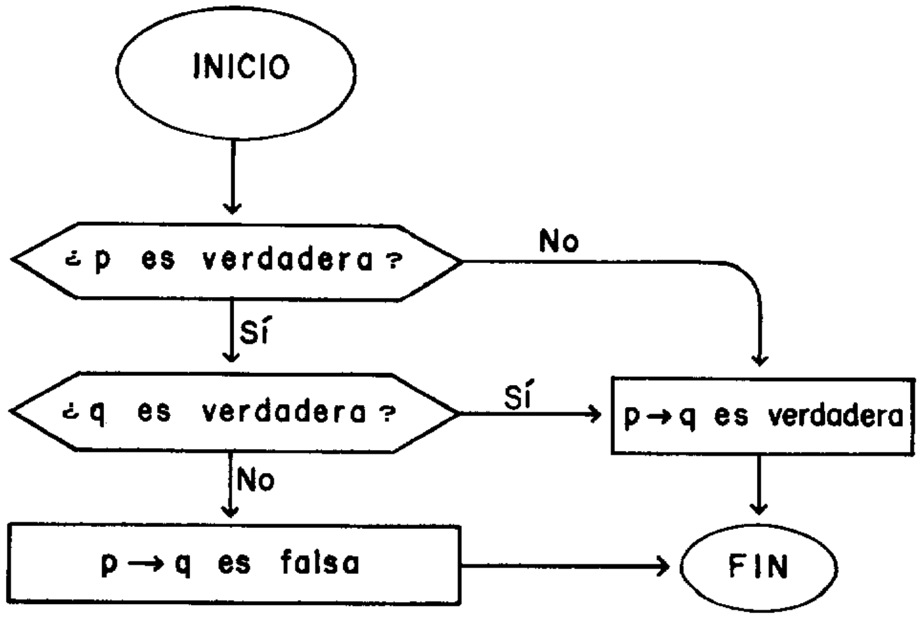
1. Diagrama de flujo para calificar una conjunción $p \wedge q$.



2. Diagrama de flujo para calificar una disyunción $p \vee q$.



3. Diagrama de flujo para calificar una condicional $p \rightarrow q$



EJERCICIOS:

Considera las proposiciones siguientes con los valores de verdad asignados.

p: "Benito Juárez nació un 21 de marzo" (V)

q: "Benito Juárez nació en Puebla" (F)

a) Califica cada una de las siguientes proposiciones, anotando en el paréntesis, el valor de verdad correspondiente

$\sim q$	( )	$\sim q \vee p$	( )
$p \vee q$	( )	$q \rightarrow p$	( )
$p \wedge q$	( )	$p \rightarrow q$	( )
$\sim p \vee q$	( )	$q \leftrightarrow \sim p$	( )

b) Escribe en lenguaje común cada una de las proposiciones dadas. Observa el ejemplo.

Ejemplo:

$q \wedge p$: "Benito Juárez nació en Puebla , un 21 de marzo"

$\sim p$: ______________________________

$\sim q \vee p$: ______________________________

$p \rightarrow q$: ______________________________

$q \rightarrow p$: ______________________________

Debido a que en matemática y en otras ciencias, el uso de las proposiciones condicionales reviste importancia, ya que muchas de sus afirmaciones son de este tipo, centremos nuestra atención en proposiciones de la forma $a \rightarrow b$

La proposición $a \rightarrow b$ se lee "si a, entonces b"

a Recibe el nombre de antecedente o hipótesis

b Recibe el nombre de consecuente, tesis, o conclusión

Así, tenemos que:

(1) En la condicional:

"Si hoy es viernes, entonces mañana será sábado"

- El antecedente o hipótesis es: "Hoy es viernes"
- El consecuente, tesis o conclusión es: "Mañana será sábado".

(2) En la condicional:

"Si soy del Estado de México, entonces nací en Toluca"

- El antecedente o hipótesis es: "Soy del Estado de México"
- El consecuente, tesis o conclusión es: "Nací en Toluca"

(3) En la condicional

"Si $3 \times 2 = 6$, entonces la capital de Veracruz es Jalapa"

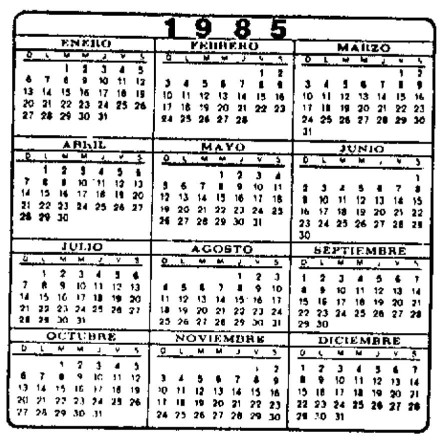
- El antecedente o hipótesis es: "$3 \times 2 = 6$"
- El consecuente, tesis o conclusión, es: "La capital de Veracruz es Jalapa"

Puedes observar que, aún cuando las proposiciones de los incisos (1), (2) y (3) anteriores tienen la misma construcción (ya que tienen la forma $a \rightarrow b$), hay diferencias en cada una de éstas.

Veamos:

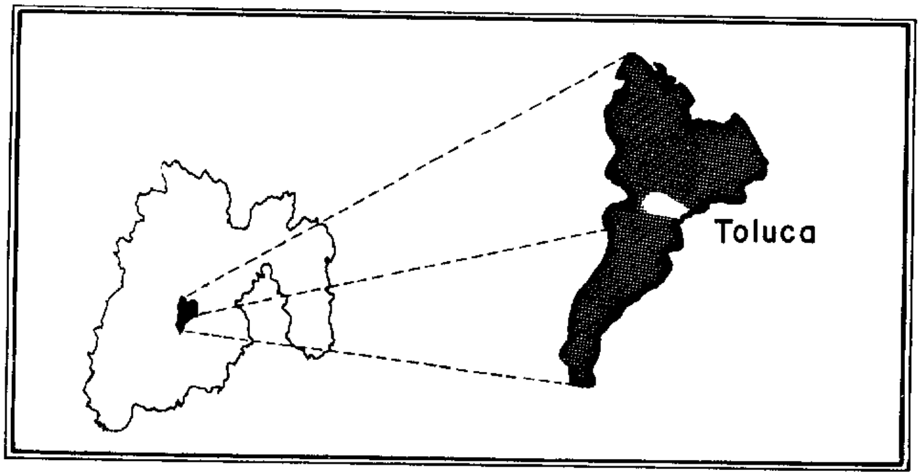
(1) En la proposición:

"Si hoy es viernes, entonces mañana será sábado"
El consecuente "naturalmente" sigue del antecedente.



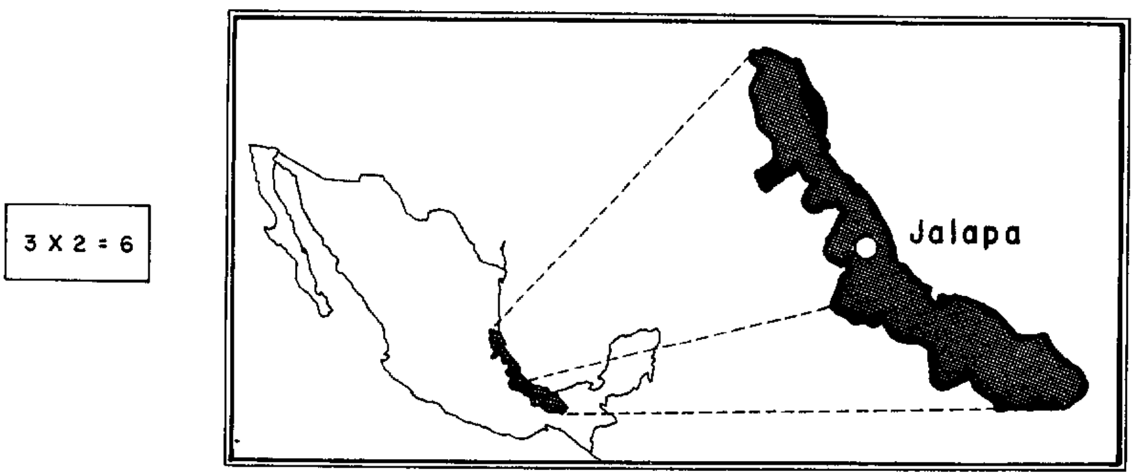
(2) En la proposición:

"Si soy del Estado de México, entonces nací en Toluca"
Aun cuando el antecedente y el consecuente guardan cierta relación de tipo real, no se ve razón suficiente para que siendo yo del Estado de México, también sea de Toluca.



Por último, en la proposición:

"Si 3 x 2 = 6, entonces la capital de Veracruz es Jalapa"
el antecedente y el consecuente no guardan relación material de tipo alguno.



Si esta situación te parece extraña es debido a que generalmente estamos familiarizados con condicionales cuyo antecedente y consecuente se cree que son verdaderos, no porque ésta sea la única clase de condicional sino, más bien, porque es la que frecuentemente estamos utilizando.

La divergencia en el uso de la frase "si ..., entonces ..." en el lenguaje ordinario y en la lógica matemática ha estado presente en larguísimas y apasionadas discusiones. Estas han concluído con la demanda a favor de una reforma de la lógica con objeto de que el uso del condicional conduzca a un acercamiento entre la ló gica y el lenguaje.

Las siguientes observaciones son de extrema importancia, tómalas en cuenta:

> Para calificar cualquier proposición compuesta, lo que importa es conocer:
>
> - su forma
> - los valores de verdad de cada uno de sus componentes
> - las reglas para calificarla.

EJERCICIO:

Con las proposiciones r: "El auto puede caminar" y
s: "El auto tiene gasolina"

a) Escribe en lenguaje común cada una de las siguientes condicionales

$r \rightarrow s$ ______________________________

$s \rightarrow r$ ______________________________

$\sim r \rightarrow \sim s$ ______________________________

$\sim s \rightarrow \sim r$ ______________________________

b) Suponiendo que la proposición **r** es verdadera y la proposición **s** es falsa, califica cada una de las siguientes proposiciones, anotando V o F en el paréntesis correspondiente.

$s \rightarrow r$	( )	$\sim r \rightarrow \sim s$	( )
$r \rightarrow s$	( )	$\sim s \rightarrow \sim r$	( )

LA CONDICIONAL Y SU RECIPROCA

Dada una condicional $a \to b$, su recíproca es la proposición $b \to a$

Ejemplos:

1) La recíproca de: "si hoy es viernes, entonces mañana será sábado"

es "si hoy es sábado, entonces mañana será viernes"

2) La recíproca de: "si nací en Toluca, entonces soy del Estado de México"

es "si soy del Estado de México, entonces nací en Toluca"

3) La recíproca de: "si hoy es lunes, entonces iré a clases"

es "si iré a clases, entonces hoy es lunes"

Los ejemplos anteriores muestran que en general, una condicional y su recíproca son diferentes. Veamos:

- en el ejemplo (2)

Es claro que si nací en Toluca, soy del Estado de México
pero si soy del Estado de México, no necesariamente nací en Toluca
(pude haber nacido en Ixtapan del Oro, por ejemplo)

Una advertencia:

No debemos confundir una condicional con su recíproca.

LA BICONDICIONAL

Previamente señalamos que una bicondicional es una proposición compuesta de la forma, $a \leftrightarrow b$, la cual se lee "a si, y solo si, b".

Esta proposición es la conjunción de una condicional y su recíproca

$$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$$

Para calificarla, sólo requerimos saber que es verdadera en el caso en que sus componentes tengan los mismos valores de verdad.

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	$a \leftrightarrow b$ $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La tabla anterior se resume en una tabla que ya conoces:

a	b	$a \leftrightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplos de bicondicionales son:

1) "Hoy es lunes si, y sólo si, mañana es martes"
2) "12 es par si, y sólo si, 12 es divisible entre 2:
3) " $3 > 2$ si, y sólo si, México está en América"

De igual manera que indicamos para una condicional, se hace para una bicondicional.

Una bicondicional es una proposición compuesta formada por proposiciones que pueden tener, o no, alguna relación de tipo material. Por ejemplo:

- En la bicondicional (1), las proposiciones: "Hoy es lunes" y "Mañana es martes" guardan cierta relación de tipo material. Sin embargo, en la bicondicional (3) las proposiciones : " $3 > 2$ " y "México está en América" no guardan relación material de tipo alguno.

También, debemos recordar que:

> Para calificar una bicondicional sólo se requiere conocer los valores de verdad de sus componentes, así como las reglas para calificarla.

Así:

a) La bicondicional:

" $3 > 2$ si, y sólo si, México está en América"

es verdadera porque sus componentes tienen los mismos valores de verdad, ambas son proposiciones verdaderas.

b) La bicondicional:

" $3 > 2$ si y sólo si $3 > 10$

es falsa porque:

" $3 > 2$ " es verdadera pero

" $3 > 10$ " es falsa

EJERCICIO

Para contestar los incisos (1) a (3) considera:

a: "Marzo es un mes con 31 días"

b: " $12 - 4 = 6$ "

c: "El cloro es un elemento químico"

d: "El 1o. de mayo se celebra el día del niño "

1. Califica cada una de las proposiciones anteriores, anotando en el paréntesis correspondiente V o F.

a: ( )

b: ( )

c: ( )

d: ( )

2. De acuerdo a los valores de sus componentes califica cada una de las siguientes bicondicionales. Utiliza las respuestas del inciso anterior.

$a \leftrightarrow b$	( )	$c \leftrightarrow d$	( )
$a \leftrightarrow c$	( )	$b \leftrightarrow c$	( )
$d \leftrightarrow b$	( )	$d \leftrightarrow a$	( )

3. Escribe en lenguaje común cada una de las siguientes bicondicionales. Observa el ejemplo:

Ejemplo:

$a \leftrightarrow b$ "Marzo es un mes con 31 días si, y sólo si, $12 - 4 = 6$ "

$a \leftrightarrow b$ ____________________

$a \leftrightarrow c$ ____________________

____

$d \leftrightarrow c$ ____________________

____

PROPOSICIONES EQUIVALENTES.

De importancia particular son las proposiciones p y q tales que $p \to q$ y $q \to p$ -- son ambas verdaderas. Cuando se tiene este caso, se escribe $p \leftrightarrow q$ que se lee "p si, y sólo si, q". En este caso se dice que las proposiciones son equivalentes lógicamente.

Por lo que:

1) Dos proposiciones falsas son equivalentes lógicamente
2) Dos proposiciones verdaderas son equivalentes lógicamente

Ejemplos:

1. a: " $2 + 2 = 5$ " es falsa
   b: " $5 = 10$ " también es falsa

   las proposiciones $a \to b$ y $b \to a$ son verdaderas, (o sea que, $a \leftrightarrow b$ es verdadera) Por lo tanto:

   Decimos que a y b son equivalentes lógicamente

2. c: " $2 + 2 = 4$ " es verdadera
   d: " $3 \times 2 = 6$ " también es verdadera

   las proposiciones $c \to d$ y $d \to c$ son verdaderas, (o sea que, $c \leftrightarrow d$ es verdadera) Por lo tanto:

   Decimos que c y d son equivalentes lógicamente

Una forma práctica para probar si dos proposiciones son equivalentes o no, lógicamente, consiste en la elaboración de las tablas de verdad de las proposiciones. Si al comparar estas tablas, los valores resultan idénticos, entonces, las proposiciones son equivalentes lógicamente.

Ejemplo:

¿ Las proposiciones $p \to q$, $\sim p \vee q$ son equivalentes?

Veamos:

1. Construímos las tablas de $p \to q$ y de $\sim p \vee q$

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Al comparar, vemos que los valores de $p \to q$ y $\sim p \vee q$ son idénticos.

De hecho, podemos comparar las tablas con mayor facilidad si las escribimos juntas. Veamos.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

En las últimas columnas, se ve claramente que las tablas de $p \rightarrow q$ y $\sim p \vee q$, -- coinciden; es decir, sus valores son idénticos.

EJERCICIOS:

a) Probar que cada pareja de proposiciones son equivalentes lógicamente.

1. $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$
2. $\sim(p \vee q)$ y $\sim p \wedge \sim q$
3. $p \vee q$ y $q \vee p$
4. $p \wedge q$ y $q \wedge p$
5. $p \rightarrow q$ y $\sim q \rightarrow \sim p$

b) Verifica que las siguientes proposiciones no son equivalentes lógicamente.

1. $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$
2. $p \vee q$ y $q \wedge p$
3. $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$
4. $\sim p \vee \sim q$ y $\sim(p \vee q)$

En el ejercicio (1), inciso (a) se dice que las proposiciones $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$ son equivalentes lógicamente. A continuación te presentamos dos ejemplos con objeto de aclarar este punto.

1) Supongamos que:

Manuel miente al decir: "Tengo 16 años y voy en secundaria"

Por lo que:

"O Manuel no tienen 16 años o Manuel no va a la secundaria"

2) Supongamos que no es cierto que:

"Ayer te busqué y me encontré a Rosa"

Entonces:

"O no es cierto que te busqué o no es cierto que encontré a Rosa"

En lógica, el estudio de las proposiciones equivalentes es de importancia; ya que frecuentemente, se simplifican razonamientos al sustituir una proposición por su equivalente.

EJERCICIO:

Las siguientes proposiciones son falsas:

a: " $12 > 15$ y $15 > 10$ "

b: " La solución de la ecuación $x + 3 = 10$, o es 5 ó es 9 "

c: "El próximo presidente será joven y de 45 años "

De cada una de las proposiciones anteriores, obtén proposiciones verdaderas. Observa el ejemplo.

Ejemplo:

1o. Como es falso que " $12 > 5$ y $15 < 10$ " , entonces su negación deberá ser verdadera, así

"$12 \not> 5$ ó $15 \not< 10$ " es verdadera

A partir de proposiciones equivalentes (proposiciones cuyas tablas de verdad coinciden), podemos obtener bicondicionales cuyos valores sean verdaderos en todos los casos.
Por ejemplo:

$p \to q$ y $\sim p \lor q$ son equivalentes porque sus tablas de verdad coinciden.

p	q	p → q		~ p	~p V q
V	V	V		F	V
V	F	F		F	F
F	V	V		V	V
F	F	V		V	V

← COINCIDEN →

Completemos la siguiente tabla:

p	q	p → q	~p ∨ q	p → q ↔ ~p ∨ q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

En la tabla anterior, podemos observar que todos los valores de verdad de $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ son verdaderos. Decimos que esta proposición es una tautología.

En general:

> Una tautología es una proposición verdadera para cualquiera de sus casos.

Otro ejemplo:

Verifiquemos que:

Si **a** y **b** son proposiciones lógicas, entonces $a \wedge b \leftrightarrow b \wedge a$ es una tautología.

a	b	a ∧ b	b ∧ a	a ∧ b ↔ b ∧ a
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

En la tabla anterior, podemos observar que todos los valores de verdad de la proposición $a \wedge b \leftrightarrow b \wedge a$ son verdaderos. Por lo tanto, esta proposición es una tautología.

EJERCICIO

Utiliza tablas de verdad para determinar cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías.

a) $p \wedge q \rightarrow p$
b) $p \rightarrow (p \vee q)$
c) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
d) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
e) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

LA IMPLICACION, UNA RELACION EN EL CONJUNTO DE PROPOSICIONES

En tus cursos anteriores, estudiaste algunos ejemplos de operaciones y de relaciones. Veamos:

1. En los números naturales $(N = \{0, 1, 2, \dots\})$ estudiaste entre otras cosas, que:

   a) La adición y la multiplicación son operaciones:

   $$3 + 2 = 5 \quad , \quad 8 \times 4 = 32$$

   es decir: de 3 y 2 obtenemos 5; $3 + 2 = 5$
   de 8 y 4 obtenemos 32; $8 \times 4 = 32$

   b) "Menor que" es una relación y se representa con el símbolo $<$

   $$4 < 10 \quad ; \quad 9 < 100$$

   es decir: dados 4 y 10; podemos escribir $4 < 10$
   dados 9 y 100; podemos escribir $9 < 100$

2. En los números racionales

   $$Q = \{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ con } a \text{ y } b \text{ enteros y } b \neq 0\}$$

   a) La adición y la multiplicación son operaciones:

   $$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

   Es decir: de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ obtenemos $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

   de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{5}$ obtenemos $\frac{2}{15}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

   b) " > " es una relación de orden

   $$\frac{10}{2} > \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{4}{3} > \frac{5}{4}$$

   Es decir: dados $\frac{10}{2}$ y $\frac{3}{4}$, podemos escribir $\frac{10}{2} > \frac{3}{4}$

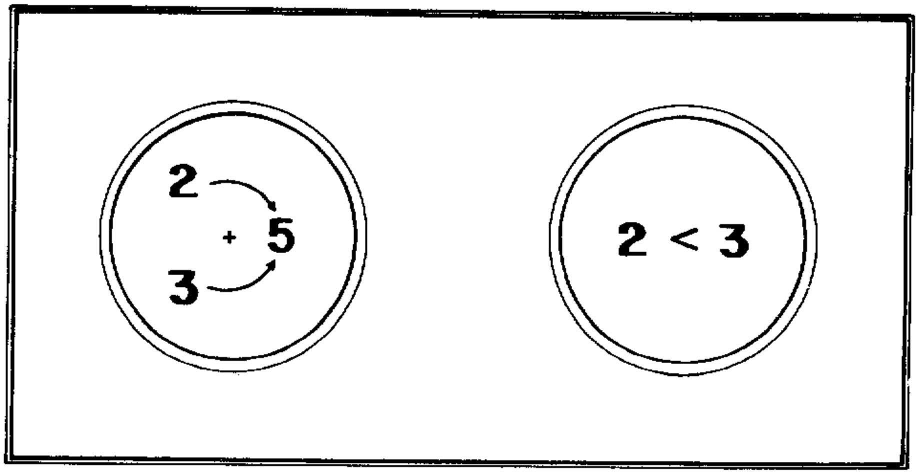
   dados $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{4}$, podemos escribir $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

   Como podrás ver:

   a) En las operaciones, a partir de dos elementos de un conjunto se obtiene otro.

   b) Con las relaciones, podemos decir si dos elementos de un conjunto están, o no, relacionados.

Ilustremos esto último utilizando un esquema:



EJERCICIOS:

a) Escribe dos operaciones en los enteros
b) Escribe dos relaciones en los enteros
c) Escribe dos operaciones en el conjunto de proposiciones

Recuerda: Con una operación en un conjunto, a partir de dos de sus elementos, obtenemos otro.

UNA RELACION EN EL CONJUNTO DE PROPOSICIONES:

Con objeto de desarrollar este tema, que es de gran importancia en la lógica deductiva, consideremos los siguientes ejemplos:

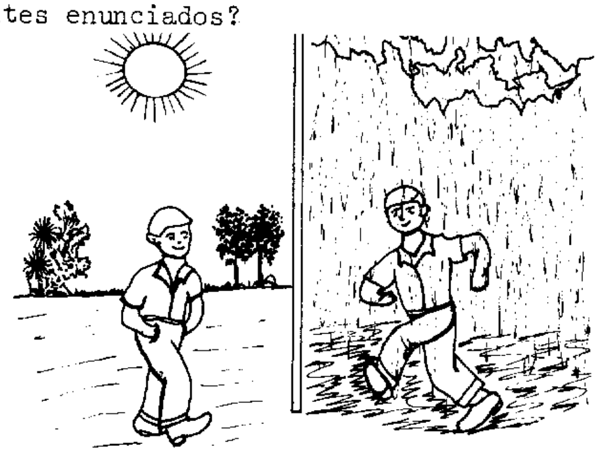
Ejemplo 1.

¿ Qué podemos concluir de los siguientes enunciados?

" Si llueve, entonces me mojaré "

" Llueve "

____



Ejemplo 2

¿ Qué podemos concluir de lo siguiente ?
" Si apruebo el curso, entonces pasaré mis vacaciones tranquilo "
" Apruebo el curso "

Ejemplo 3.

¿ Qué podemos concluir de lo siguiente?
" Si Anita se casa, entonces comprará casa "
" Anita se casa "

Probablemente, estés de acuerdo en que:

a. En el ejemplo (1), la conclusión es: "Me mojaré"
b. En el ejemplo (2), la conclusión es: "Apruebo el curso "
c. En el ejemplo (3), la conclusión es: "Anita comprará casa "

Algunas observaciones que podemos hacer acerca de los tres ejemplos anteriores son:

1o. Cada uno tiene la forma:

$a \rightarrow b$

$\underline{a \qquad\qquad}$

2o. En cada uno, suponemos que las proposiciones:

$a \rightarrow b$ y a son verdaderas

3o. También, en cada ejemplo, concluimos que b es cierto.
Es decir, deducimos b.

Resumiendo:

Si $\quad a \rightarrow b \quad$ y $\quad\quad\ \ \underline{a\qquad\qquad\qquad}$ Se concluye (o deduce), b Se dice que: " b se deduce de a" o " a implica b" y simbólicamente, se representa por: $$a \Rightarrow b$$

Dos advertencias:

1)	$a \Rightarrow b$	<u>es una relación</u> entre proposiciones
2)	$a \Rightarrow b$	<u>no</u> es una <u>proposición</u>

EJERCICIOS:

Para cada pareja de proposiciones, obtén una conclusión.

a) " Si tengo 18 años, entonces soy mayor de edad "
   " <u>Tengo 18 años</u> "

Conclusión: ______________________

b) " Si $x + 11 = -8$, entonces, x es negativo "
   " <u>$x + 11 = -8$</u> "

Conclusión: ______________________

c) " Si no llueve, entonces se perderá la cosecha "
   " <u>No llueve</u> "

Conclusión: ______________________

d) " Si un número a es múltiplo de 5, entonces a termina en 0 "
   " <u>a es múltiplo de 5</u> "

Conclusión: ______________________

e) " Si el triángulo ABC es rectángulo, entonces tiene dos ángulos complementarios "

" El triángulo ABC es rectángulo "

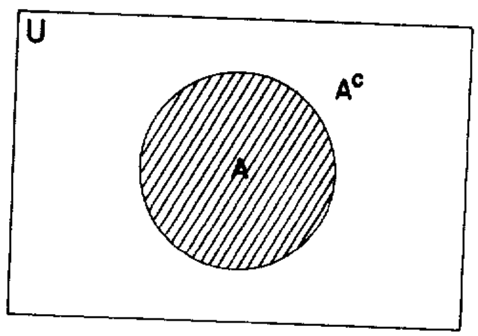
Conclusión: ______________________

CONJUNTOS A PARTIR DE PROPOSICIONES.

En la primera unidad del segundo curso de matemáticas estudiamos que:
A partir de un conjunto universo, U, y una proposición abierta **a** se obtienen:

1) Un conjunto de elementos de U que satisfacen a la proposición **a**, llamémosle conjunto A.
2) Un conjunto de elementos de U que no satisfacen a la proposición **a**. Este conjunto recibe el nombre de complemento de A, y se denota por A^c

Si utilizamos diagramas de Venn para representar lo que acabamos de decir, tenemos:



Un ejemplo:

Si U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
y **a** = " x es un número que divide a 8 "

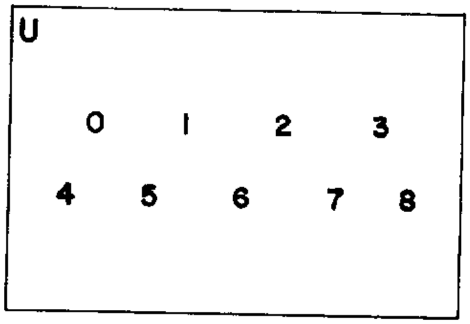
Entonces:

A = {1,2,4,8} y A^c = {0,3,5,6,7}

A es el conjunto solución de la proposición **a**.

A^c es el complemento del conjunto A.

De:



a = "x es un divisor de 8"

Obtenemos:

$A = \{1,2,4,8\}$

y

$A^c = \{0,3,5,6,7\}$

A es el conjunto solución de **a**.

A^c es el complemento de A.

EJERCICIO:

Dado el conjunto $U = \{0,5,10,15,20,25,30,35,40\}$ y las proposiciones:

c = " x es un múltiplo de 10 "

d = " y es una potencia de 5 "

Encuentra:

a) El conjunto solución de la proposición **c**.
   El conjunto solución de la proposición **d**.

b) Los complementos de los conjuntos del inciso anterior

c) Representa por separado y en diagramas de Venn a cada conjunto con su complemento.

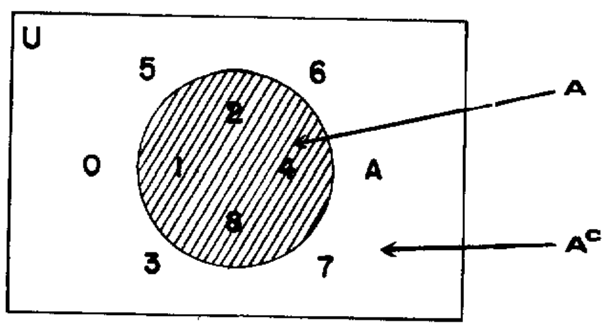
Definición:

> Dado un universo, U, el complemento de un conjunto A (contenido en U) está formado por los elementos de U que no pertenecen a A.

En forma simbólica:

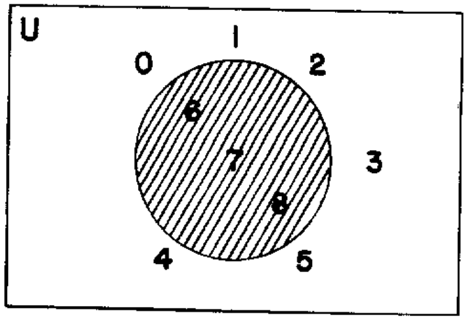
$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Regresando al problema original, tenemos, en diagramas de Venn, que:

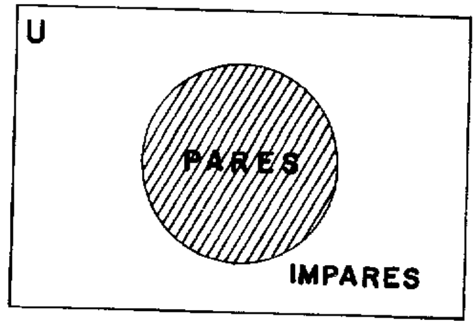


El complemento de A está formado por elementos de U que <u>no</u> pertenecen a A. En el diagrama, el complemento de A aparece sin sombra.

Otros diagramas para un conjunto y su complemento:



(a)



(b)

En el diagrama (a):

- El conjunto B está formado por los elementos de U que son mayores o iguales que 6; es decir:

$$B = \{x \in U \mid x \geq 6\}$$

- El complemento de B está formado por los elementos de U que no pertenecen a B; es decir:

$$B^c = \{x \in U \mid x \notin B\} = \underbrace{\{0,1,2,3,4,5\}}$$

Los elementos de B^c son menores que 6.

En el diagrama (b):

- El universo es el conjunto de los números naturales.
- El conjunto sombreado está formado por los números naturales que son pares; el complemento de este conjunto está formado por los números impares.

En forma análoga, en tu curso anterior, estudiamos la unión y la intersección de conjuntos a través de proposiciones, diciendo que:

Dado un conjunto universo, U, y dos proposiciones abiertas **p** y **q** cuyos conjuntos solución son P y Q, respectivamente.

1) $P \cup Q$ es el conjunto solución de la proposición $p \vee q$.

2) $P \cap Q$ es el conjunto solución de la proposición $p \wedge q$.

Un ejemplo:

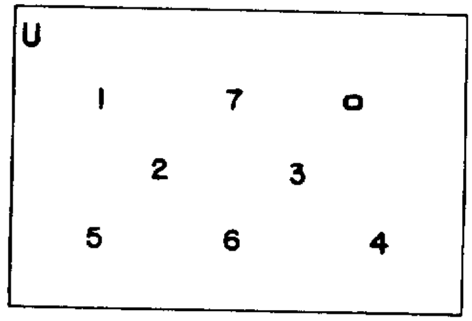
Si $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ y

a = " x es un número mayor que 2 "
b = " x es un número menor que 5 "

Entonces:

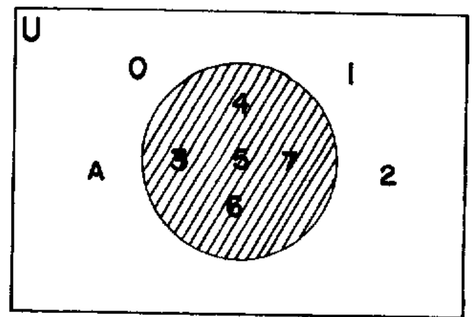
1. El conjunto solución de **a** es: $A = \{3,4,5,6,7\}$
2. El conjunto solución de **b** es: $B = \{0,1,2,3,4\}$

En diagramas de Venn:



a: " x es un número mayor que 2 "

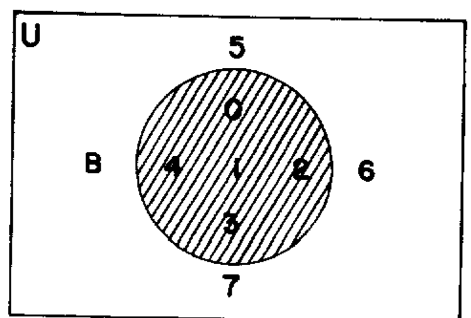
Conjunto solución A = {3,4,5,6,7}



A

b: " x es un número menor que 5 "

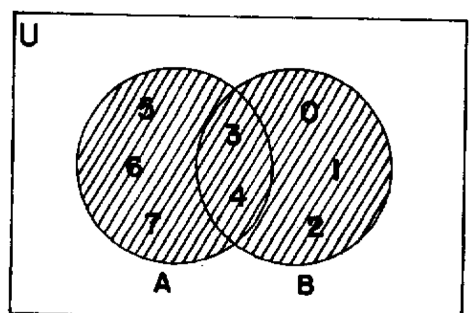
Conjunto solución B = {0,1,2,3,4,}



B

a v b : " x es un número mayor que 2 ó menor que 5 "

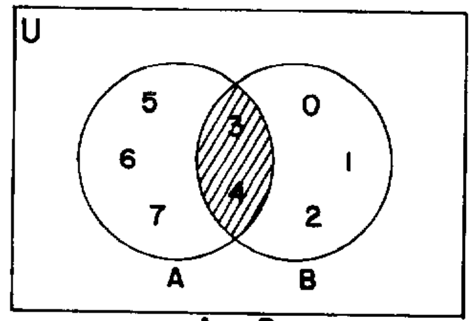
Conjunto solución: A U B = {0,1,3,4,5,6,7}



A u B

a ∧ b: " x es un número mayor que 2 y menor que 5 "

Conjunto solución: $A \cap B = \{3,4\}$



A ∩ B

En general:

Si A y B son los conjuntos solución (o conjuntos de verdad) de las proposiciones abiertas **a** y **b**; entonces:

1) $A \cup B$ es el conjunto solución de la disyunción **a ∨ b.**
2) $A \cap B$ es el conjunto solución de la conjunción **a ∧ b.**

EJERCICIOS:

Dado $U = \{a,e,i,o,u\}$ y las proposiciones

a: " x es una vocal de la palabra México "
b: " y es una vocal de la palabra terrícola "
c: " z es una vocal de la palabra Toluca "

1) Encuentra el conjunto solución de las proposiciones a,b y c y denótalos por A, B y C, respectivamente
2) Utiliza (por separado), diagramas de Venn para representar a A, B, y C
3) Encuentra el conjunto solución de:

$a \vee b$ $\qquad$ $b \vee d$

$a \wedge b$ $\qquad$ $b \wedge d$

4) Representa en diagramas de Venn a cada uno de los conjuntos del punto anterior
5) Determina:

$A \cup B$ $\qquad$ $B \cup D$

$A \cap B$ $\qquad$ $B \cap D$

6) Compara los conjuntos de los incisos (3) y (5) y completa lo siguiente:

El conjunto solución de $a \vee b$ es: ______________________

El conjunto solución de $a \wedge b$ es: ______________________

El conjunto solución de $b \vee d$ es: ______________________

El conjunto solución de $b \wedge d$ es: ______________________

LA CONDICIONAL Y LOS SUBCONJUNTOS.

También, para una condicional $a \to b$ podemos obtener un conjunto. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo:

Supongamos que: $U = \{a,e,i,o,u\}$

y que p: " x es una vocal de la palabra México "
q: " x es una vocal de la palabra Toluca "

¿ Cuál es el conjunto solución de $p \to q$?

Para responder esta pregunta, lo que se requiere es encontrar aquellos elementos de U que hacen verdadera la proposición

" Si x es una vocal de la palabra México, entonces x es una vocal de la palabra Toluca "

Aclaremos este punto:

Para hacerlo, sustituyamos cada elemento de U en la proposición $p \to q$ y elijamos aquellas que la convierten en una proposición verdadera.

1) Con a:

" a es una vocal de la palabra México, entonces a es una vocal de la palabra Toluca ".

En esta proposición: El antecedente es falso y el consecuente verdadero; por lo tanto; la condicional obtenida es verdadera.

Así: a es un elemento del conjunto solución de $a \to b$.

2) Con e:

" Si e es una vocal de la palabra México, entonces e es una vocal de la palabra Toluca "

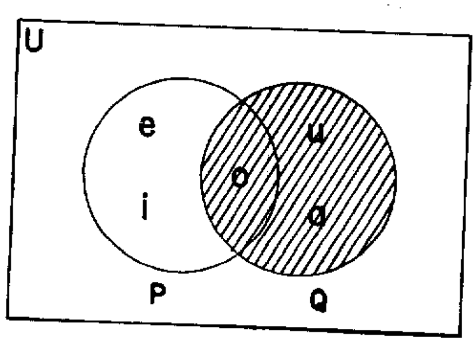
Esta proposición es falsa ya que el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Por lo tanto: e no es un elemento del conjunto solución de $a \to b$.

Podemos continuar con este procedimiento para obtener el conjunto solución de $p \to q$:

$$\{a, o, u\}$$

Con diagramas de Venn:



Conjunto Solución de $p \to q$

En este caso, el conjunto solución de la proposición $p \to q$ coincide con el conjunto solución de la proposición q.

Dos observaciones:

1o. Dos elementos de P, no satisfacen la condicional, porque no están en Q
Estos elementos son: e, i.

2o. P no está contenido en Q. (ver diagrama en hoja anterior)

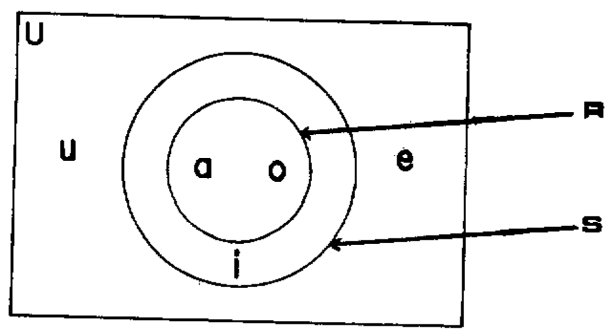
Otro ejemplo:

Si U = {a, e, i, o, u}

y **r**: = " x es una vocal de la palabra bondad "
s: = " x es una vocal de la palabra diario "

El conjunto solución de **r** es: R = {a, o}

El conjunto solución de **s** es: S = {a, i, o}



El conjunto solución de $r \to s$ es:

{a, e, i, o, u} = U

Es decir, coincide con U

Dos observaciones:

1o. Todos los elementos de U (y en particular los de R) hacen verdadera la condicional

2o. R está contenido en S

En general:

Si en un conjunto universo, U, las proposiciones abiertas **p** y **q** tienen respectivamente como conjuntos solución (o conjunto de verdad) a los conjuntos P y Q, entonces, todos los elementos de U (y en particular los de R) hacen verdadera la condicional $p \to q$ siempre y cuando $P \subset Q$.

Abreviamos esto diciendo que:

$a \to b$ es verdadera para todos los elementos de U si, y solo si, $A \subset B$. A y B son los conjuntos de verdad de **a** y **b** respectivamente.

Recuerda que:

1o.	La unión y la intersección son operaciones entre conjuntos La disyunción y la intersección son operaciones entre proposiciones
2o.	La contención es una relación entre conjuntos La condicional no es una relación entre proposiciones

EJERCICIOS:

Si U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} y las proposiciones abiertas

m: " x es un número primo "
n: " x es un número par mayor que 3 "
o: " x es un número mayor que 1 "
p: " x es un múltiplo de 3 mayor que 2 ."

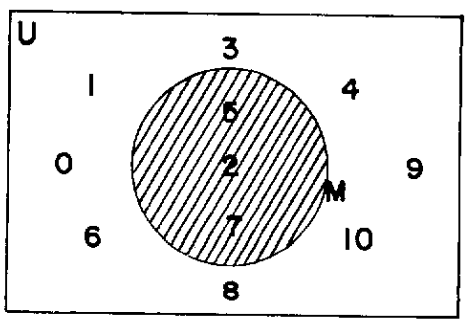
a) Completa lo siguiente como en el ejemplo:

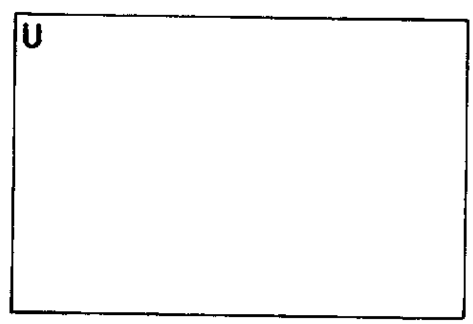
Ejemplo:

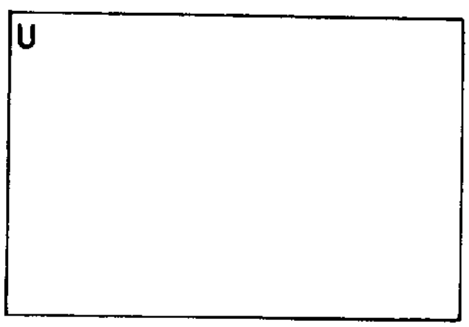
El conjunto solución de **m** es: M = {2,5,7}
El conjunto solución de **n** es: N = { , , , }
El conjunto solución de **o** es: O = {, , , , , , , ,}
El conjunto solución de **p** es: P = { , ,}

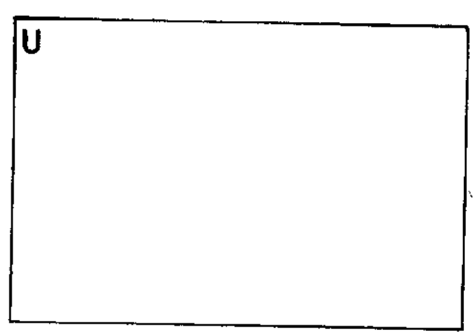
b) Representa, en diagramas de Venn, (y por separado) tus respuestas al inciso anterior.

Ejemplo:









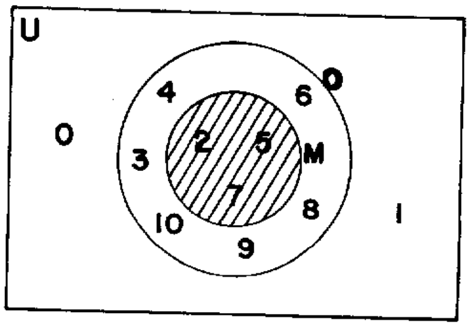
c) Para cada una de las afirmaciones anteriores, anota en el paréntesis correspondiente Falso o Verdadero según sea el caso:

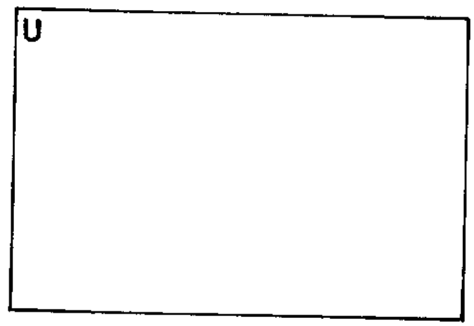
Ejemplo:

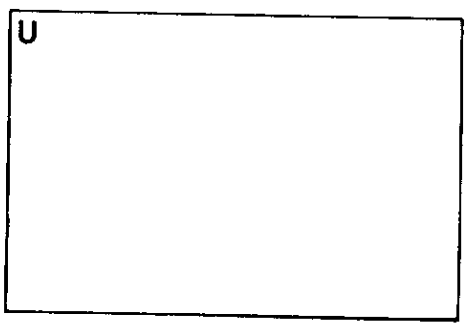
$M \subset O$	Verdadero
$N \subset O$	__________
$M \subset N$	__________
$P \subset M$	__________

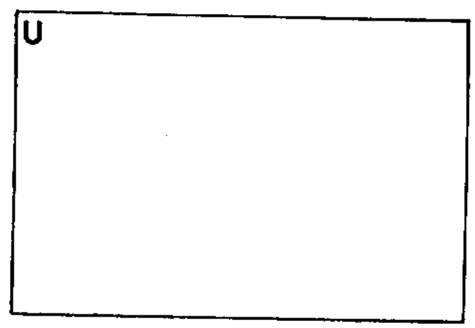
d) Utiliza un diagrama de Venn para representar cada pareja de conjuntos del inciso anterior.

Ejemplo:









e) Para cada una de las siguientes condicionales, escribe sobre la línea " es verdadera " o " no es verdadera " para todos los elementos de U; según sea el caso

Ejemplo:

$m \rightarrow o$	Si es verdadera (cada elemento de U la satisface)
$n \rightarrow o$	__________
$m \rightarrow n$	__________
$p \rightarrow m$	__________

LA BICONDICIONAL Y LA IGUALDAD ENTRE CONJUNTOS.

En secciones previas, dijimos que una bicondicional es una proposición de la forma $a \leftrightarrow b$ y que ésta corresponde a: $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$. Es decir, es una conjunción entre una condicional y su recíproca.

De hecho, una bicondicional $a \leftrightarrow b$ será verdadera si $a \rightarrow b$ y $b \rightarrow a$, son verdaderas. En conjuntos:

> Una proposición $a \leftrightarrow b$ es verdadera para todos los elementos de U si, y sólo si, $A \subset B$ y $B \subset A$. A y B son conjuntos de verdad de las proposiciones **a** y **b**.

En forma más breve:

> $a \leftrightarrow b$ es verdadera para todos los elementos de U siempre y cuando $A = B$.
> A y B son los conjuntos de verdad de las proposiciones a y b.

Aclaremos este asunto utilizando tres ejemplos:

Ejemplo 1:

Consideremos al conjunto universo U = {5, 10, 27, 31, 33, 42, 45, 56} y a las proposiciones abiertas.

a: " x es un múltiplo de 3 "
b: " x es un número cuya suma de cifras es un múltiplo de 3

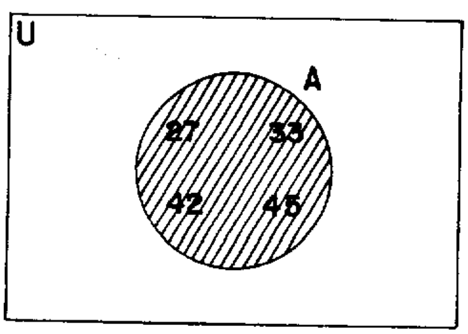
El conjunto solución de la proposición **a** es:

A = {27, 33, 42, 45}

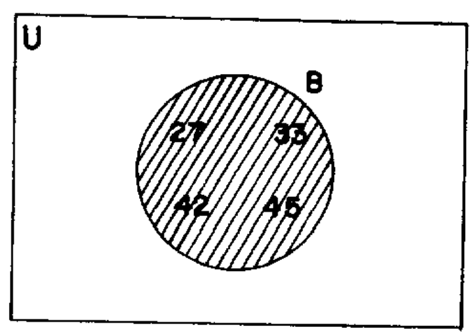
El conjunto solución de la proposición **b** es:

B = {27, 33, 42, 45}

Podemos observar que A = B



Cada elemento de A es un múltiplo de 3.



Cada elemento de B es un número cuya suma de cifras da un múltiplo de 3.

Porque:	Por ejemplo:	
	Número	Suma de cifras
$27 = 3 \times 9$	27	$2 + 7 = 9 = 3 \times 3$
$33 = 3 \times 11$	33	$3 + 3 = 6 = 2 \times 3$
$42 = 3 \times 14$	42	$4 + 2 = 6 = 2 \times 3$
$45 = 3 \times 15$	45	$4 + 5 = 9 = 3 \times 3$

¿ Cuál será el conjunto solución de la proposición $a \leftrightarrow b$?

Para responder, pensemos en los elementos de U que hacen verdadera la proposición:

" x es un múltiplo de 3 si, y solo si, x es un número cuya suma de cifras es un múltiplo de 3 "

Si escribimos en forma más compacta, tenemos:

$$x \in A \leftrightarrow x \in B$$

Sustituyamos a cada elemento de U en esta proposición, califiquemos la proposición obtenida.

(1)	$5 \in A \leftrightarrow 5 \in B$	(V)
(2)	$10 \in A \leftrightarrow 10 \in B$	(V)
(3)	$27 \in A \leftrightarrow 27 \in B$	(V)
(4)	$31 \in A \leftrightarrow 31 \in B$	(V)
(5)	$33 \in A \leftrightarrow 33 \in B$	(V)
(6)	$42 \in A \leftrightarrow 42 \in B$	(V)
(7)	$45 \in A \leftrightarrow 45 \in B$	(V)
(8)	$56 \in A \leftrightarrow 56 \in B$	(V)

Las proposiciones (1), (2), (4) y (8) son verdaderas porque el antecedente y consecuente respectivos, son falsos.

Las proposiciones (3), (5) y (7) son verdaderas porque el antecedente y consecuente son ambos verdaderos.

De hecho, todos los elementos de U satisfacen la proposición $a \leftrightarrow b$

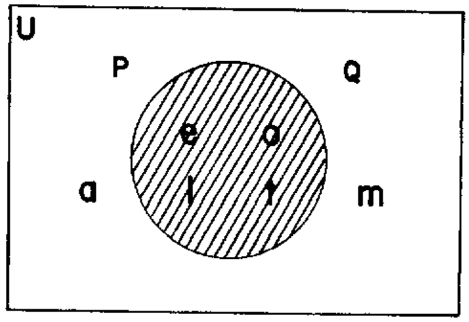
Ejemplo 2.

Si U = {a,e,o, l, t, m } y las proposiciones:

p: " x es una letra de la palabra elote "
q: " x es una letra de la palabra Otelo "

El conjunto solución de la proposición $p \leftrightarrow q$ es U (cada elemento de U hace verdadera a la proposición $p \leftrightarrow q$)

" x es una letra de la palabra elote si, y solo si, x es una letra de la palabra Otelo "



P y Q coinciden:
es decir: P = Q

Observa que:

1o. El conjunto solución de p es: {e, l, o, t}
El conjunto solución de q es: {o, t, e, l}

2o. a satisface la proposición $p \leftrightarrow q$ porque al sustituir, en esta, se tiene:

" a es una letra de la palabra elote $\leftrightarrow$ a es una letra de la palabra Otelo "

Y tanto el antecedente como el consecuente son falsos.

Ejemplo 3:

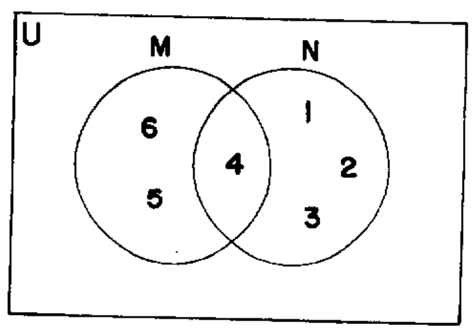
Si U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

y las proposiciones abiertas

m = " $x > 3$ " $\qquad$ M = {4, 5, 6}
n = " $x < 5$ " $\qquad$ N = {1, 2, 3, 4}

¿Cuál es el conjunto solución de la proposición $m \leftrightarrow n$?

Observemos el siguiente diagrama:



Hay elementos de M que no pertenecen a N: son 5 y 6.
Hay elementos de N que no pertenecen a M: son 1, 2 ,y 3.

Por lo tanto:

Los conjuntos M y N son diferentes: es decir: $M \neq N$
El único elemento de U que hace verdadera la proposición $m \leftrightarrow n$ es 4
¡ Los demás elementos no la hacen verdadera !

$6 \in M$ pero $6 \notin N$ $\qquad$ $1 \in N$ pero $1 \notin N$
$5 \in M$ pero $5 \notin N$ . . . etc.

EJERCICIO

Considera U = {letras del alfabeto} y las proposiciones

d: " x es una letra de la palabra PELOTA "
e: " x es una letra de la palabra PELO "
f: " x es una letra de la palabra PETALO "
g: " x es una letra de la palabra TAPELO "
h: " x es una letra de la palabra LOPE "

1) Para cada una de las siguientes proposiciones indica si su conjunto de verdad es U o no.

Ejemplos:

$d \rightarrow e$ No tiene por conjunto de verdad a U

$e \leftrightarrow h$ Sí tiene por conjunto de verdad a U

$e \rightarrow f$ ______________________________

$f \leftrightarrow g$ ______________________________

$e \rightarrow d$ ______________________________

$d \leftrightarrow f$ ______________________________

$g \rightarrow d$ ______________________________

$g \leftrightarrow d$ ______________________________

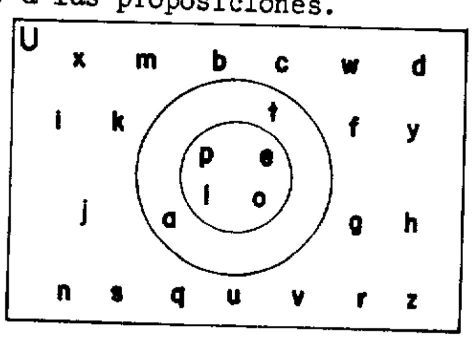
2) Si D, E, F, G y H son respectivamente los conjuntos solución, o conjuntos de verdad, de las proposiciones: d, e, f, g y h. Completa lo siguiente:

Ejemplo:

D = {p, e, l, o, t, a }
E = { , , , }
F = { , , , , ,}
G = { , , , , ,}
H = { , , , , ,}

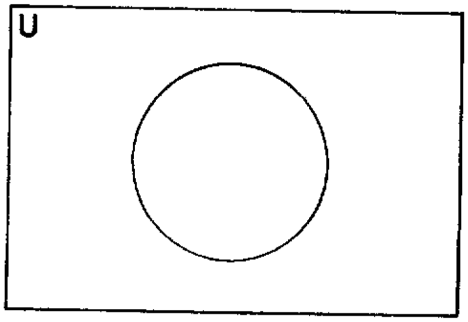
3) Completa los siguientes diagramas de Venn y escribe en lenguaje común lo correspondiente a las proposiciones.

Ejemplo:



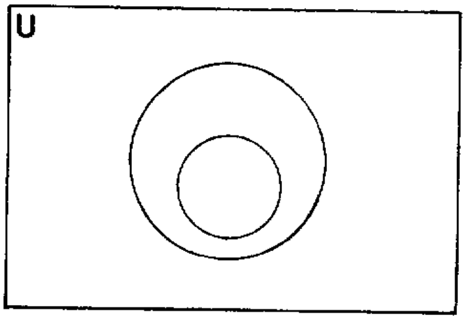
$d \rightarrow e$ no tiene por conjunto de verdad a U

$D \not\subset E$



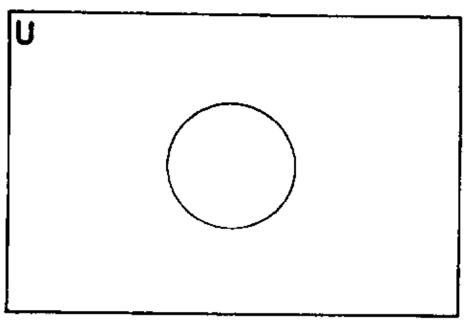
E = H

e $\leftrightarrow$ h



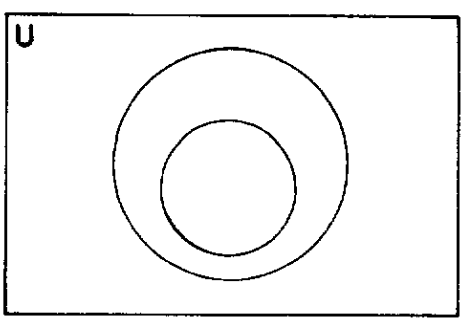
E c D

e $\rightarrow$ f



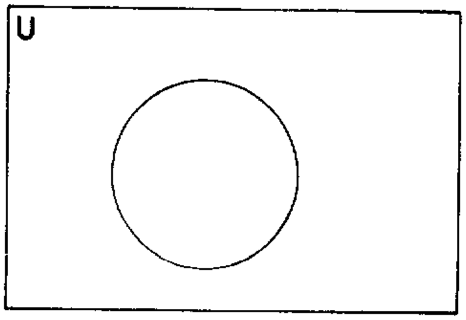
F = G

f $\leftrightarrow$ g



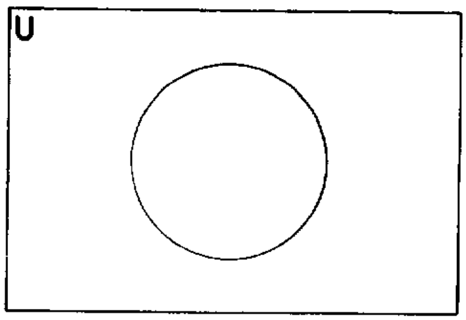
E c D

e $\rightarrow$ d



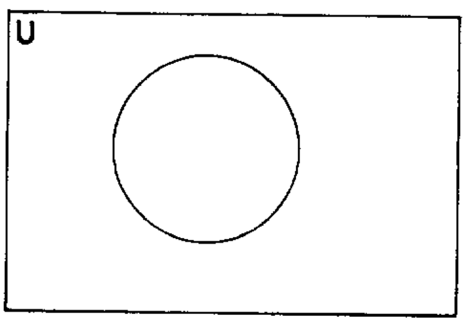
$D = F$

$d \leftrightarrow f$



$G \subset D$

$g \rightarrow d$



$G = D$

$g \leftrightarrow d$

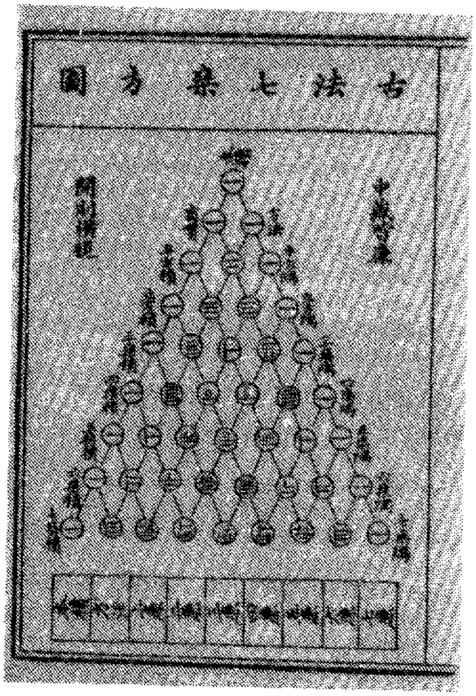
unidad 2

factorización

LOS MATEMÁTICOS NO ESTUDIAN LOS -- OBJETOS, SINO LAS RELACIONES ENTRE LOS OBJETOS; POR TANTO, LES ES INDIFERENTE REEMPLAZAR ESTOS OBJETOS POR OTROS, CON TAL QUE NO CAMBIEN LAS RELACIONES. LA MATERIA NO LES IMPORTA, SÓLO LES INTERESA LA FORMA.

HENRI POINCARE.

I N T R O D U C C I O N



Triángulo de Chu Shih-Chieh aparecido en 1303 posteriormente recibe el nombre de "Triángulo de Pascal".

Sumergidos en el deseo de representar un número por medio de una longitud, y carentes de notación algebraica adecuada, los griegos idearon ingeniosos procesos geométricos para representar operaciones algebraicas. Muchas de estas ideas se encuentran dispersas en los libros de los "Elementos" de Euclides, aparecen proposiciones, las cuales en realidad son identidades algebraicas expresadas geométricamente.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

El conocimiento de identidades como la mencionada arriba nos facilitan los procesos algebraicos que de otro modo sería muy laborioso desarrollarlos. En la presente unidad, recordaremos algunos conceptos y operaciones algebraicas, así como la propiedad distributiva en los números racionales.

Estudiaremos, detenidamente, los productos de ciertos binomios y la factorización de polinomios; para ello, usaremos conceptos aprendidos en cursos anteriores.

Si al finalizar esta unidad somos capaces de encontrar los factores de un polinomio, habremos facilitado el proceso para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática (tema principal de la unidad III).

OBJETIVOS PARTICULARES:

* Aplicará los productos notables (cuadrado de un binomio, binomios conjugados y binomios con un término común) en la multiplicación de polinomios.

* Factorizará polinomios que tengan factor común.

* Factorizará los productos notables estudiados de las formas: $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$ y $x^2 + bx + c$

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Obtendrá un trinomio cuadrado perfecto, al calcular el cuadrado de un binomio.

- Obtendrá la diferencia de cuadrados, al multiplicar binomios conjugados.

- Obtendrá un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, al multiplicar binomios con un término común.

- Aplicará la propiedad distributiva en la factorización de polinomios dados.

- Factorizará polinomios que tengan un factor común.

- Factorizará un trinomio cuadrado perfecto.

- Factorizará la diferencia de cuadrados.

- Factorizará expresiones de la forma: $x^2 + bx + c$.

OPERACIONES CON POLINOMIOS

En el curso anterior de Matemáticas estudiamos expresiones de la forma: ax^n donde a es un número que nombramos coeficiente, y n un entero positivo, llamado grado de dicho monomio. Ejemplo de ellos son:

	$5x^2$	$-3b^3$	$-\frac{1}{2}c$	$0.75d^3$	a^3
Coeficiente	5	-3	$-\frac{1}{2}$	0.75	1
Variable	x	b	c	d	a
Grado	2	3	1	3	3

Observa que el exponente n, en los casos anteriores, es un entero positivo y que los coeficientes son números racionales.
Las variables representan cualquier número racional.
También, estudiaste expresiones de otro tipo, como:

a) $3x^2+4x+5$ b) $4x+2$ c) $3x-1$

Que se obtienen al sumar o restar monomios de grado diferente.

El polinomio del inciso (a) está formado por 3 monomios y es un ejemplo de trinomio.

Los polinomios de los incisos (b) y (c) están formados por 2 monomios y son ejemplos de polinomios, llamados binomios.

MULTIPLICACION DE MONOMIOS

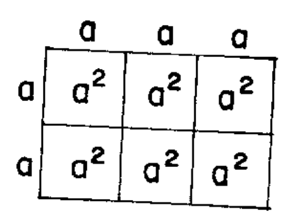
Si multiplicamos dos monomios el resultado es un monomio:

$$(ax^n)(bx^m) = abx^{n+m}$$

Para ejemplificar, multipliquemos $(5x^4)$ por $(6x^3)$:

Por asociatividad de la multiplicación.	$(5x^4)(6x^3)=[(5x^4)(6)]x^3$
Por conmutatividad de la multiplicación.	$=[(6)(5x^4)]x^3$
Por asociatividad de la multiplicación.	$=[(6)(5)(x^4)]x^3$
Producto de (6) (5)	$=[(30)(x^4)]x^3$
Por asociatividad de la multiplicación.	$=(30)[(x^4)(x^3)]$
Producto de potencias de la misma base.	$=30x^7$

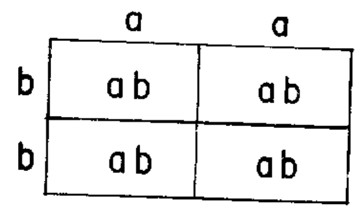
Veamos, geométricamente, cómo se vería el producto de 3a por 2a:



El rectángulo de la derecha tiene 3a de largo y 2a de ancho.

Su área es el producto (3a) (2a) que puede verse en la figura igual a $6a^2$, es decir: $(3a)\ (2a) = 6a^2$

¿Cómo se vería el producto de 2a y 2b?



$(2a)\ (2b) = 4ab$

Observa que en la primera figura obtenemos cuadrados (multiplicamos variables por sí mismas) y, en la siguiente figura, obtenemos rectángulos (multiplicamos variables diferentes).

ACTIVIDAD 1.

JUEGO: GATO

Número de jugadores: 2
Material: un tablero, dos fichas y marcadores.
Mecánica del juego:

1. Se juega por turnos.
2. El jugador A cubre, con las dos fichas, uno o dos casilleros de la hilera de los factores.
3. Multiplica los monomios escogidos y coloca un marcador, en el casillero del tablero en que se encuentre el producto de dichos monomios.
4. Corresponde el turno al jugador B, éste solo puede mover una ficha de las dos que se encuentran en la hilera de los factores y colocarla en otro casillero. O se pueden colocar las dos fichas en el mismo factor.
5. El jugador B podrá colocar su marcador en el respectivo casillero, sólo si éste no tiene ya un marcador.

Será el ganador aquel jugador que sea capaz de colocar tres de sus marcadores, ya sea en forma horizontal, vertical o diagonal.

FACTORES

n^0	$3n$	$8n^2$	$4n$	n	n^2

TABLERO

$9n^2$	$3n^2$	1	n^2
$4n$	$24n^3$	$3n$	$8n^4$
$8n^3$	$3n^3$	$4n^2$	n^4
$8n^2$	n	n^3	$16n^2$

Ahora, multipliquemos polinomios de diferentes tipos.

1) Encontremos el producto del monomio $2x$ y el binomio $(4x+2)$

$$2x\,(4x + 2) = 8x^2 + 4x$$

$\cdot$	2	$4x$
$2x$	$4x$	$8x^2$

2) Multipliquemos $(3a^2 + a)$ por (2)

$$\begin{array}{r} 3a^2 + a \\ \underline{\times \qquad 2} \\ 6a^2 + 2a \end{array}$$

$\cdot$	$3a^2$	a
2	$6a^2$	$2a$

3) Efectuemos el producto de $(2m^3 + m^2 - 3m)$ por $(4m)$.

$$\begin{array}{r} 2m^3 + m^2 - 3m \\ \underline{\times \qquad\qquad 4m} \\ 8m^4 + 4m^3 - 12m^2 \end{array}$$

$\cdot$	$2m^3$	m^2	$-3m$
$4m$	$8m^4$	$4m^3$	$-12m^2$

En los ejercicios anteriores, ilustramos la multiplicación con una tabla de doble entrada.

Observemos que cada uno de los términos de un polinomio se multiplica por cada uno de los términos del otro polinomio. Este procedimiento se debe a la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma; en símbolos, la expresaríamos como:

$$\boxed{\text{Si } a, b \text{ y } c \in Q \text{ , } a(b+c) = ab + ac}$$

Estos son otros ejemplos de multiplicación de polinomios:

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} 2(3a^2 + a) &= 2(3a^2) + 2(a) \\ &= 6a^2 + 2a \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} 4m\,(2m^3 + m^2 - 3m) &= 4m(2m^3) + 4m(m^2) + 4m\,(-3m) \\ &= 8m^4 + 4m^3 - 12m^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

Calculemos $(3y + 2)$ por $(5y + 10)$

$$\begin{aligned}(3y+2)(5y+10) &= (3y+2)(5y) + (3y+2)(10)\\ &= (3y)(5y) + 2(5y) + (3y)(10) + (2)(10)\\ &= 15y^2 + 10y + 30y + 20\\ &= 15y^2 + 40y + 20\end{aligned}$$

•	5y	10
3y	$15y^2$	30y
2	10y	20

Ejemplo 4.

Calculemos $(4w^2 + 3w + 1)$ por $(2w + 3)$

$$\begin{aligned}(4w^2+3w+1)(2w+3) &= (4w^2+3w+1)(2w)+(4w^2+3w+1)(3)\\ &= (4w^2)(2w) + (3w)(2w) + (1)(2w) +\\ &\quad (4w^2)(3) + (3w)(3) + (1)(3)\\ &= 8w^3 + 6w^2 + 2w + 12w^2 + 9w + 3\\ &= 8w^3 + 18w^2 + 11w + 3\end{aligned}$$

•	$4w^2$	3w	1
2w	$8w^3$	$6w^2$	2w
3	$12w^2$	9w	3

Ejemplo 5.

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= a(c + d) + b(c + d)\\ &= ac + ad + bc + bd.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} a + b\\ \underline{c + d}\\ ad + bd\\ \underline{ac + bc}\\ ac + bc + ad + bd\end{array}$$

	a	b
c	ac	bc
d	ad	bd

EJERCICIOS:

a) Utilizando las propiedades de la multiplicación y de la suma de monomios, encuentra los siguientes productos de polinomios.
$x\,(2x^2 + 1) =$
$(3x^2 + 2)(5x^3 - 6) =$
$(4x^2 - 6x)(3x^2 + 2x - 5) =$

b) Escribe, en la siguiente tabla de doble entrada, los monomios que faltan.

•	$5x^2$	2x	1
x	$5x^3$		
4		8x	

$(x + 4)(5x + 2x + 1)$

•	y^2	y	2
3y			6y

$3y\,(y^2 + y + 2)$

c) Multiplica los siguientes polinomios y representa la multiplicación con una tabla de doble entrada.
$(a + b)\,(a + b)$
$(a - b)\,(a - b)$
$(a + b)\,(a - b)$
$(a - b)\,(a + b)$

d) Aplica, solamente, la propiedad distributiva, como en el ejemplo:

$$(5x-2)(3x+1) = 5x(3x+1) - 2(3x+1)$$
$$= 5x(3x)+5x(1)-2(3x)-2(1)$$

$(x - 3)(x + 2) =$

$(2m + 4)(2m - 4) =$

$(6r + 3)(3r^2 - 2r) =$

$(x + y)(x - z) =$

e) Realiza en tu cuaderno, las siguientes multiplicaciones:

$9(m + 5)$

$x^2(3x^2 + 2x)$

$(x + 3)(x + 3)$

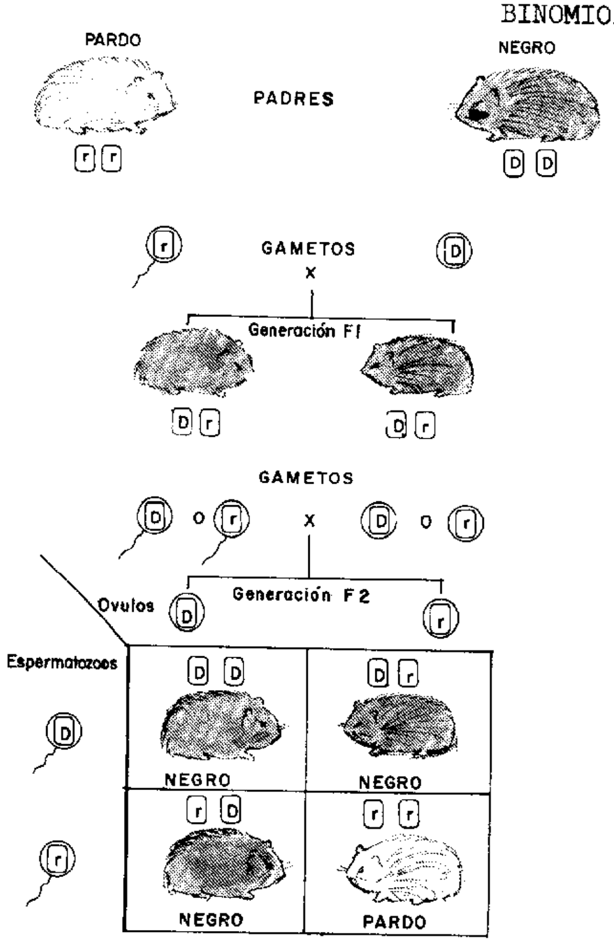
$(5y - 1)(5y + 1)$

$(3x - 3)(3x - 4)$

PRODUCTOS NOTABLES.

Podemos realizar variadas multiplicaciones para ejercitarlas; pero nos interesan, especialmente, algunas que presentan patrones determinados.

BINOMIOS AL CUADRADO.



Gregor Mendel, genetista austriaco, estudió la herencia de caracteres contrastantes. Contó y registró características de padres y descendientes de cada cruza. Sus conocimientos matemáticos le permitieron interpretar sus datos y le indujeron formular la hipótesis de que cada rasgo es determinado por 2 factores genéticos. Estos factores pueden presentarse como dominantes (D), o recesivos (r).
En la segunda generación aparecen tres tipos de combinación. (fig. 1)

$$DD + 2Dr + rr$$

La expresión anterior es resultado de multiplicar un binomio por él mismo.

Al tomar este binomio $(D + r)$ y multiplicarlo por el mismo, obtenemos un trinomio cuadrado perfecto. Realicemos la multiplicación, (siguiente página).

Figura 1.
El color negro, en los cobayos, es un factor dominante sobre el color pardo.

$$\begin{aligned}(D+r)(D+r) &= D(D+r) + r(D+r)\\ &= DD+Dr+rD+rr\\ &= DD+2(Dr)+rr\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} D + r\\ \underline{\times\ D + r}\\ Dr + r^2\\ \underline{D^2 + Dr}\\ D^2 + 2Dr + r^2\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{(D + r)^2 = D^2 + 2Dr + r^2}$$

Que en lenguaje común debe entenderse:
Si D y r son números arbitrarios, entonces el cuadrado de su suma será igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Este procedimiento puede representarse así:

	D	r
D	D^2	Dr
r	Dr	r

Realicemos otros ejemplos. A la derecha de cada uno representemos las operaciones con tablas de doble entrada.

1) $$\begin{aligned}(a+7)(a+7) &= a(a+7) + 7(a+7)\\ &= a(a)+a(7)+7(a)+7(7)\\ &= a^2 + 14a + 49\end{aligned}$$

•	a	7
a	a^2	7a
7	7a	49

2) $$\begin{aligned}(x+3y)(x+3y) &= x(x+3y) + 3y(x+3y)\\ &= x^2+3xy+3xy+9y^2\\ &= x^2+6xy+9y^2\end{aligned}$$

•	x	3y
x	x^2	3xy
3y	3xy	$9y^2$

3) $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 3$

•	a	3
a	a^2	3a
3	3a	9

¿Cómo calcularíamos $(a-b)^2$?

Para hacerlo, usemos lo conocido hasta ahora:

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$

$=(a-b)a-(a-b)b$ — Por distributividad de la multiplicación

$=a^2-ba-ab+b^2$

$=a^2+ba(-1-1)+b^2$ — Por factorización

$=a^2+ba(-2)+b^2$ — Adición de $(-1-1)$

$=a^2-2ab+b^2$

o bien:

$(a-b)^2=(a+(-b))^2$ — Por definición de la resta

$=a^2+2(a)(-b)+(-b)^2$ — Por distributividad de la multiplicación

$=a^2-2ab+b^2$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Si } a,b \in Q\ ,\quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$$

Ahora, veamos en qué difieren las siguientes expresiones:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

La diferencia entre ambos es el signo en el término 2ab.

•	2x	-3
2x	$4x^2$	-6x
-3	-6x	+9

Realicemos otros ejemplos.

1) $(2x-3)(2x-3) = 2x(2x-3) + (-3)(2x-3)$

$= 2x(2x)+2x(-3)+(-3)(2x)+(-3)(-3)$

$= 4x^2 - 6x - 6x + 9$

$= 4x^2 - 12x + 9$

2) $(4x-y)(4x-y) = (4x)^2+2(4x)(-y) + (-y)^2$

$= 16x^2 - 8xy + y^2$

	4x	-y
4x	$16x^2$	-4xy
-y	-4xy	y^2

EJERCICIOS:

a) Escribe el resultado de las siguientes operaciones:

$(4x-2)^2 =$

$(m-n)(m-n) =$

$(5a-2b)(5a-2b) =$

$(6x-y)^2 =$

$(x+y^3)^2 =$

b) Escribe el término que falta en cada una de las siguientes expresiones:

$(5a+b)^2 = 25a^2+10ab+$ ______

$(x-y)^2 = x^2 -$ ______ $+ y^2$

$(3p+2q)^2 = 9p^2 +$ ______ $+ 4q^2$

$(a+3b)^2 =$ ______ $+ 6ab + b^2$

$(x+1) =$ ______ $+ 2x +$ ______

c) Calcula los siguientes cuadrados:

$(x + 4)^2 =$
$(2x+ 1)^2 =$
$(3x+ 5)^2 =$
$(x + y)^2 =$
$(x +2y)^2 =$

$(x - 4)^2 =$
$(2x- 1)^2 =$
$(3x- 5)^2 =$
$(x - y)^2 =$
$(x -2y)^2 =$

d) Escoge la expresión adecuada de la hilera de la derecha y escríbela sobre la línea.

$(x-2)^2 =$ __________ x^2+4x+4; x^2+4x-4; x^2-4x+4; x^2-4x-4

$(y+3)^2 =$ __________ y^2-6y-9; y^2+6y-9; y^2-6y+9; y^2+4y+9

$(-w-5)^2=$ __________ $w^2+10w+25$; $w^2-10w-25$; $w^2-10w+25$; $w^2+10w-25$

e) Escribe el término adecuado en los espacios vacíos de las siguientes tablas:

•	6	2
6	36	
2		4

•	X	1
X		X
1		

•	3m	-n
3m		
-n		n^2

•	2n	-p
2n		
-p	-2np	

f) Verifica los siguientes resultados utilizando las fórmula, como se ve en el ejemplo:

EJEMPLO: $(8 + 2)^2 = 100$
Utilizando la fórmula:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, tenemos:

$$(8+2)^2 = 8^2+2(8)(2) + 2^2$$
$$= 64+2(16) + 4$$
$$= 64+32 + 4 = 100$$

$(15 + 10)^2 = 625$

$(8 + 4)^2 = 144$

$(7 + 4)^2 = 121$

$(-2 + 6)^2 = 16$

$(-3 - 6)^2 = 81$

$(10 - 3)^2 = 49$

$(-11- 3)^2 = 196$

$(11 + 9)^2 = 400$

BINOMIOS AL CUBO.

En uno de los trabajos de Chu-Shih Chieh (1303), el más grande de los algebristas chinos de su tiempo, apareció el arreglo triangular de los coeficientes de un binomio elevado a la potencia n:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . . .

Forma ahora comunmente conocida como - - "triángulo de Pascal."
Este arreglo triangular apareció impreso en la portada de "Aritmética" de Petrus Apianus en 1527 (Figura 2).

1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

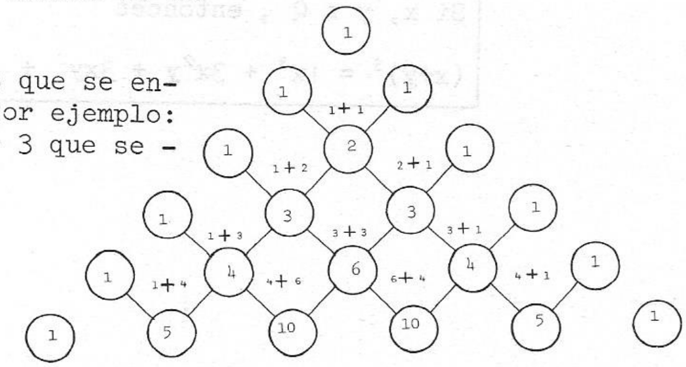
Figura 2.

Pascal en 1654 investigó dicho arreglo bajo una nueva forma.

Hizo numerosos descubrimientos relativos a esta forma y los escribió en su "Traité du Triangle Arithmetique", publicado en 1665.

Obtenemos los números del triángulo de Pascal de la siguiente manera:

Son los resultados de sumar los números que se encuentran en la parte inmediata superior. Por ejemplo: 6 es el resultado de sumar los números 3 + 3 que se - encuentran arriba de él.



Este arreglo nos permite identificar:

- El número de términos según la potencia a la que se eleva un binomio (si el binomio se encuentra elevado a la cero potencia, los números de la primera hilera nos indican que tiene un término; si está elevado a la primera potencia, la segunda hilera nos indica el número de términos, etc.) y
- Los coeficientes correspondientes a los términos del resultado después de haber elevado ese binomio a la **n** potencia.

  Ejemplo:

relacionemos los números del triángulo con los productos del binomio $(x + y)$ elevado a 0, 1a., 2da. y 3era. potencias.

Binomios elevado a n potencia	Triángulo de Pascal.	No. de términos
$(X + Y)^0 = 1$	1	1 término
$(X + Y)^1 = 1x + 1y$	1 1	2 términos
$(X + Y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$	1 2 1	3 términos

Por medio del triángulo de Pascal nos damos cuenta que el número de términos de un binomio al cubo son 4 y los coeficientes son; 1,3,3, 1 ¿Cómo encontramos los exponentes?

Recordemos que $(x + y)^3 = (x + y)^2\ (x + y)$
$(x + y)^2$ es un binomio al cuadrado y su producto ya lo conocemos, entonces
$(x + y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)\ (x + y)$

Multipliquemos al trinomio por el binomio. Usemos dos de las tres formas que ya conocemos:

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2+2xy+y\ ) &= x(x^2+2xy+y^2) + y(x^2+2xy+y^2)\\ &= x^3+2xy+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^2+2xy+y^2 \\ \underline{x\ +y} \\ \underline{x^2y+2xy^2+y^3} \\ \underline{x^3+2x^2y+\ xy^2\qquad} \\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \end{array}$$

Entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x,\ y \in Q\ ,\ \text{entonces}\\ (x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3\end{array}}$$

Los coeficientes se presentan en forma descendente para el primer término y ascendente para el segundo.

Ascendente para y

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Descendente para x

EJERCICIOS:

a) Auxiliándote del triángulo de Pascal, encuentra el producto de:

$(a + b)^3 =$
$(2x + y)^3 =$
$(m + 2)^3 =$
$(x + 4y)^3 =$
$(m + n)^3 =$

b) Con ayuda del triángulo de Pascal, obtén los resultados de:

$(x + y)^4$ y $(x + y)^5$, posteriormente - - comprueba el resultado haciendo las multiplicaciones.

PRODUCTO DE BINOMIOS CONJUGADOS.

Dos binomios conjugados son: $(a + b)$ y $(a - b)$

Calculemos: $(a + b)\ (a - b)$.

$(a+b)(a-b)$	$= (a+b)(a) - (a+b)(b)$	Por distributividad de la multiplicación.
	$= a(a+b) \quad - b(a+b)$	Por conmutatividad de la multiplicación.
	$= a(a)+a(b)-[b(a)+b(b)]$	Por distributividad de la multiplicación.
	$= a^2+ab-ba - b(b)$	Realizando los productos
	$= a^2+ab-ab - b^2$	Por conmutatividad de la multiplicación.
	$= a^2 - b^2$	Sumando términos.

Así:

$$\boxed{\text{Si } a,b\ Q\ ,\quad (a+b)(a-b) = a^2-b^2}$$

Lo que, en lenguaje común, quiere decir que el producto de dos binomios conjugados es igual a una diferencia de cuadrados.

En la práctica, es frecuente equivocarse al utilizar esta fórmula. Con objeto de ilustrar algunos ejemplos que pueden advertirte de ello, observa lo siguiente:

Calculemos:

a) $(x + 3)\ (x - 3)$
términos con diferente signo
términos con igual signo

$(x+3))x-3) = x^2 - 9$

b) $(-x+ 3)\ (x + 3)$

términos con igual signo

términos con diferente signo.

$$(-x+ 3)(x + 3) = 9 - x^2$$

c) $(x - 3)\ (x + 3)$

términos con diferente signo

términos con igual signo.

$$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$$

d) $(-x- 3)\ (x - 3)$

términos con igual signo

términos con diferente signo.

$$(-x- 3)(x - 3) = 9 - x^2$$

EJERCICIOS:

a) Escribe el término que falta en los siguientes productos:

$(x+y)\ (x-y) =$ ______ $-y^2$

$(-3a+2)(3a+2) =$ ______ $+4$

$(-a+b)(a+b) =$ ______ $+b^2$

$(5a+3b)(5a-3b) = 25a^2-$ ______

$(2x+ y)(-2x+y) =$ ______ $+y^2$

b) Calcula los siguientes productos de binomios conjugados.

$(a+5)\ (a-5) =$

$(x+6)\ (x-6) =$

$(x-10)(x+10) =$

$(3x+1)(3x-1) =$

$(w-8)\ (w+8) =$

$(6a+2)(6a-2) =$

$(2-b)\ (2+b) =$

$(5-w)\ (5+w) =$

$(1+3z)(1-3z) =$

$(-m+2)(-m-2) =$

c) Representa las siguientes diferencias de cuadrados como producto de binomios conjugados.
Observa el ejemplo:

$9m^2 - 16 = (3m + 4)(3m - 4)$

$a^2 - 25 =$
$w^2 - 100 =$
$x^2 - 49 =$
$4m^2 - 16 =$
$81 - 64 =$
$36p^2 - 144 =$
$4 - k^2 =$
$16 - 4 =$
$x^2 - 6.25 =$

d) Completa las siguientes tablas de doble entrada.

$\bullet$	$2x$	y^2
$2x$		
$-y^2$		

$\bullet$	m	$3n$
m		
$-3n$		

PRODUCTO DE BINOMIOS CON UN TERMINO COMUN.

La expresión $(x + a)\ (x + b)$ representa al producto de dos binomios con un término común, que es x.

Encontremos el polinomio resultante:

$$
\begin{aligned}
(x+a)(x+b) &= (x+a)(x)+(x+a)(b)\\
&= x(x+a) + b(x+a)\\
&= x^2+xa+bx+ba\\
&= x^2+ax+bx+ab\\
&= x^2+(a+b)\ x+ab
\end{aligned}
$$

Es decir, en forma simbólica:

$$
\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x,\ a,\ b\ \varepsilon\ Q\ ,\ \text{entonces}\\ (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\ x + ab\end{array}}
$$

Cuadrado del término común

Producto de la suma de los términos no comunes y del término común.

Producto de los términos no comunes

•	x	- 5
x	x^2	-5x
8	8x	-40

Mostremos algunos ejemplos más:

$$
\begin{aligned}
(x-5)(x+8) &= x(x+8)+(-5)(x+8)\\
&= x(x)+x(8)+(-5)(x)+(-5)(8)\\
&= x^2+(8-5)x+(-5)(8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
x\ -\ 5\\
\underline{x\ +\ 8}\\
8x\ -40\\
\underline{x^2-5x\qquad}\\
x^2+3x\ -40
\end{array}
$$

•	-3	x
-3	9	-3x
y	-3y	xy

$$
\begin{array}{r}
-\ 3 + x\\
\underline{-\ 3 + y}\\
-\ 3y+xy\\
\underline{9\ -\ 3x\qquad\quad}\\
9\ -\ 3x\ -\ 3y+xy
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(-3+x)(-3+y) &= -3(-3+y)+x(-3+y)\\
&= -3(-3)+(-3)y+x(-3)+x(y)\\
&= \ 9+(x+y)(-3)+xy
\end{aligned}
$$

•	x	y
x	x^2	xy
z	xz	zy

$$
\begin{array}{r}
x\ +\ y\\
\underline{x\ +\ z}\\
xz+yz\\
\underline{x^2\ +\ xy\qquad}\\
x^2\ +\ zy\ +xz+yz
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)(x+z) &= x(x+z)\ +\ y(x+z)\\
&= xx+xz+yx+yz
\end{aligned}
$$

•	x	3
x	x^2	3x
2	2x	6

$$
\begin{aligned}
(x+3)(x+2) &= x^2+(3+2)x+3(2)\\
&= x\ +5x+6
\end{aligned}
$$

$(2x+5)(2x-9) = 4x^2+(5-9)2x+(5)(-9)$
$= 4x^2-8x-45$

•	$2x$	5
$2x$	$4x^2$	$10x$
-9	$-18x$	-45

EJERCICIOS:

a) Escribe los términos que faltan:

$(x-3)(x-2)=x^2+(\quad + \quad)x \; + (\quad)(\quad)$

$(x+5)(y-2)=y^2+(\quad + \quad)y \; + (\quad)(\quad)$

$(3m-4)(3m+2)=9m^2+(\quad + \quad)3m + (\quad)(\quad)$

$(r+2)(r+1)=r^2+(\quad + \quad)r \; + (\quad)(\quad)$

$(6+4)(6-2)=36+(\quad + \quad)6 \; + (\quad)(\quad)$

b) Para $f(x) = x^2+5x+6$, asígnale los siguientes valores a x: -3,-2,-1,0 , 1 y encuentra el valor de f(x)

x	f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	

c) Encuentra los productos siguientes:

$(x + 4)(x - 2) =$

$(x + 8)^2 =$

$(x - 3)(x + 3) =$

$(y - 5)(y + 2) =$

$(4a- 5)(4a- 5) =$

$(3m- 1)(3m+ 1) =$

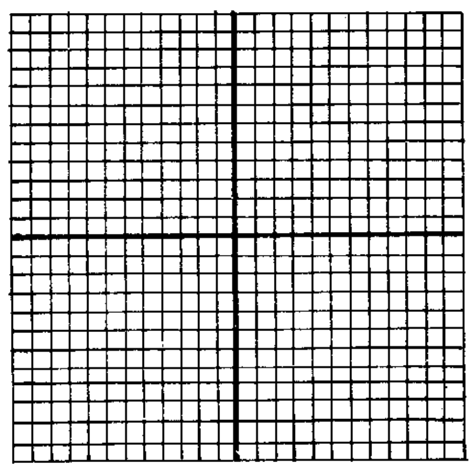
$(5x+ 4)(5x- 2) =$

$(h - 2)(h - 2) =$

$(i + 9)(i + 3) =$

$(4a^2+2)^2 =$

- Grafica los puntos obtenidos.
  Ahora por el procedimiento algebraico - encuentra los factores de x^2+5x+6
- Escribe en que puntos se cruza la línea con el eje de las abscisas.



- ¿Qué relación existe entre los puntos - que cortan el eje de las abscisas y los factores del trinomio?

d) Escribe los términos que faltan tanto en la tabla como en el -- producto correspondiente.

•	x	5
x		$5x$
-3	$-3x$	

$(x+5)(\quad) = x^2+2x-15$

•	x	6
x		

$(x+6)(x+\quad) = x^2+7x+6$

•	x	
x		

$(x+\quad)(x-\quad) = x^2+3x-10$

e) Escribe en cada tabla los términos que faltan.

•	x	1
x	x^2	
2		

•	m	8
m		
-2		

•	x	
x	x^2	$3x$
	$2x$	6

•	$2x$	3
$2x$		
2		

FACTORIZACION

En la cuarta unidad del primer curso de matemáticas, estudiamos el tema de factorización y aprendimos que, por ejemplo, 36 puede representarse en forma de producto como:

$36 = (1)\ (36)$
$36 = (2)\ (18)$
$36 = (3)\ (12)$
$36 = (4)\ (\ 9)$
$36 = (6)\ (\ 6)$
$36 = (2)\ (\ 2)\ (9)$
$36 = (2)\ (\ 2)\ (3)\ (3)$

Cuando tenemos dos números naturales x, y; x divide a y si existe $z \in N$ con la condición de que z multiplicado por x dé como resultado a y.

Lo anterior lo podemos representar como:

Si $x, y \in N$, entonces $x|y$ si existe $z \in N$ tal que $xz = y$

La divisibilidad, también, se extiende a los polinomios. Por ejemplo: si tenemos dos polinomios $p(x)$ y $g(x)$, $p(x)$ será divisible entre $g(x)$, si existe $h(x)$, tal que multiplicados $g(x)$ por $h(x)$, dé como producto $p(x)$.

$$\boxed{g(x) \mid p(x) \quad \text{si existe} \quad h(x) \quad \text{tal que} \quad g(x) \cdot h(x) = p(x)}$$

Ejemplo:

Algunos factores de $30x$ son:

1	(porque $1.30x = 30x$)
6	(porque $6.\ 5x = 30x$)
10	(porque $10.\ 3x = 30x$)
15	(porque $15.\ 2x = 30x$)
30	(porque $30.\ 1x = 30x$)
x	(porque $x \cdot 30 = 30x$)
$2x$	(porque $2x \cdot 15 = 30x$)
$3x$	(porque $3x \cdot 10 = 30x$)
$5x$	(porque $5x \cdot 6 = 30x$)
$6x$	(porque $6x \cdot 5 = 30x$)
$10x$	(porque $10x \cdot 3 = 30x$)
$15x$	(porque $15x \cdot 2 = 30x$)
$30x$	(porque $30x \cdot 1 = 30x$)

Otros ejemplos:

a) ¿Cuáles son los factores de $15x^3$?

Solución:

En primer grado, nos dimos cuenta de la necesidad de usar una factorización - única y convenimos en manejar aquella que tuviera sólo números primos. Como- no sabemos los valores de las variables, unicamente las representamos como - factores según el número del exponente; entonces la factorización de $15x^3$ es:

$$15x^3 = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x$$

Los factores del monomio ax^n incluyen los factores del coeficiente a, los factores de x^n $(x, x^2, \ldots\ldots, x^n)$, y los productos de diversas combinaciones de estos factores.

En esa misma unidad (factorización), del primer grado definimos el máximo común divisor de varios números, como el mayor entero que es divisor de cada uno de ellos. Apliquemos estas ideas a monomios con coeficientes enteros.

Consideremos por ejemplo, los monomios $10x^4$ y $15x^3$

El máximo común divisor de sus coeficientes es 5 y la potencia más alta de x, que es un divisor de los dos monomios, es x^3. Es razonable considerar a $5x^3$ como el máximo común divisor de los monomios originales.

Entonces:

El máximo común divisor de varios monomios con coeficientes enteros es el producto de: el máximo común divisor del conjunto de números formado por los coeficientes de los monomios y las variables con la potencia más alta común como factores a dichos monomios.

Dos monomios, cuyo máximo común divisor es 1, reciben el nombre de primos relativos.

Por ejemplo:

a) Encontremos el máximo común divisor de $5x^3$ y $10x^6$

Solución:

$$5X^3 = 5 \quad X X X$$
$$10X^6 = 5 \cdot 2 \quad X X X X X X$$

El máximo común divisor es: $5x^3$

b) Encontremos el máximo común divisor de $25x^2$ y $10y^2$

Solución:

$$25x^2 = 5 \cdot 5 \; x\,x$$
$$10y^2 = 2 \cdot 5 \; y\,y$$

El máximo común divisor es 5.

c) Encontremos el máximo común divisor de $10x^2$ y $3y^3$

Solución:

$$10x^2 = 2 \cdot 5\ x\ x$$
$$3y^3 = 3\ y\ y\ y$$

El único factor que estos monomios tienen en común es 1. Por lo tanto, son primos relativos.

FACTORIZACION DE POLINOMIOS

Lo que hemos aprendido en las secciones previas resultará de utilidad para factorizar polinomios. Para comprender este concepto, veamos lo siguiente.

> Factorizar un polinomio significa escribirlo como un producto de polinomios.

Ejemplo 1)

Factoricemos $12x^5 + 6x^2y + 18x^2$

Solución:

$$12x^5 = 2 \cdot 3 \cdot 2\ x\ x\ x\ x\ x$$
$$6x^2y = 2 \cdot 3\ y\ x\ x$$
$$18x^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3\ x\ x$$

El máximo común divisor es: $6x^2$, entonces:

$$12x^5+6x^2y+18x^2 = 6x^2(2x^3) + 6x^2(y) + 6x^2(3)$$
$$= 6x^2(2x^3 + y + 3)$$

Ejemplo 2)

Factoricemos $5a^3b + 20a^2b^2 + 15ab^3$

Solución:

$$5a^3b = 5\ a\ a\ a\ b$$
$$20a^2b^2 = 5 \cdot 2 \cdot 2\ a\ a\ b\ b$$
$$15ab^3 = 5 \cdot 3\ a\ b\ b\ b$$

El máximo común divisor es: $5ab$, entonces:

$$5a^3b + 20a^2b^2 + 15ab^3 = 5ab(a^2) + 5ab(4ab) + 5ab(b^2)$$
$$= 5ab(a^2 + 4ab + b^2)$$

EJERCICIOS:

a) Factoriza los siguientes monomios.

1) $8a^2 b =$

2) $5m^4 =$

3) $16 =$

4) $18x^6 =$

5) $12ab^2 =$

b) Factoriza los siguientes polinomios.

1) $18a - 3ab =$

2) $24m^2 + 29m + 6m^3 =$

3) $15xy^2 - 20x^2y =$

4) $15a^5 + 5a^4 - 20a^3 =$

5) $16mn + 8m + 8n =$

c) Identifica el máximo común divisor de las siguientes parejas de monomios.

1) $12xy, 6x^2y$ ________

2) $16mn, 12$ ________

3) $24a^2b, 12a$ ________

4) $13y, 20xy^2$ ________

5) $36xm, 12mx$

d) Factoriza los polinomios siguientes:

1) $wy + wz + xy + xz =$

2) $ab + ac + 2b + 2c =$

3) $xy + xz - 5y - 5z =$

FACTORIZACION DE EXPRESIONES DEL TIPO

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 \quad y \quad x^2 + bx + c$$

Centremos, ahora, nuestra atención para factorizar trinomios.

En las páginas anteriores obtuvimos los productos de:

a) Binomios al cuadrado $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) Binomios conjugados $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

c) Binomios con un término común. $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$

Podemos decir lo siguiente:

a) En la primera expresión, el polinomio resultante es un trinomio, al que llamaremos trinomio cuadrado perfecto -ésto, debido a que es el cuadrado de un binomio.
Es decir:

> Un trinomio es cuadrado perfecto si puede escribirse como el cuadrado de un binomio.

b) En la segunda expresión, el polinomio resultante es una diferencia de cuadrados. Por lo que podemos decir que:

> Una diferencia de cuadrados es igual a un producto de binomios conjugados.

c) En la tercera expresión, el polinomio resultante es un trinomio.

Utilizaremos esta información para factorizar polinomios de segundo grado.

TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS Y SU FACTORIZACION.

Observemos lo siguiente:

Ejemplo 1: Factoricemos: $x^2 + 10x + 25$
x^2 y 25 son los cuadrados de x y 5
10x corresponde a 2(5) x, entonces:
$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5)$

Realicemos el proceso inverso y veamos si efectivamente $(x + 5)(x + 5)$ corresponde a $x^2 + 10x + 25$

$$(x + 5)(x + 5) = x(x + 5) + 5(x + 5)$$
$$= x^2 + 5x + 5x + 25$$

Por lo tanto: $(x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$

Ejemplo 2: Factoricemos: $9x^2 - 12xy + 4y^2$
$9x^2$ y $4y^2$ son cuadrados de 3x y 2y
12xy corresponde a 2(3x)(2y), entonces:
$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)(3x - 2y)$

Ejemplo 3: ¿Cómo podríamos factorizar al trinomio $x^2 + 8x + 16$?

$$\underbrace{x^2}_{\text{cuadrado de } x} + \underbrace{8x}_{\text{doble producto } x \text{ y } 4} + \underbrace{16}_{\text{cuadrado de } 4}$$

Veamos como podemos encontrar la factorización con tablas de doble entrada.

•	x	
x	x^2	
		16

Esta tabla nos representa al trinomio $x^2 + 8x + 16$, nuestro problema se reduce a completar la tabla.

Podríamos probar algunos casos y después verificar.

a)

•	x	2
x	x^2	2x
8	8x	16

b)

•	x	16
x	x^2	16x
1	x	16

c)

•	x	4
x	x^2	4x
4	4x	16

Te habrás dado cuenta que las tablas de (a) y (b) no corresponden a nuestro -problema.

La tabla (a) corresponde al trinomio: $x^2 + 10x + 16$

La tabla (b) corresponde al trinomio: $x^2 + 17x + 16$

Sin embargo, la tabla (c) sí corresponde a nuestro problema. $x^2 + 8x + 16$

Comprobemos:

$$(x+4)^2 = x^2 + 2(x)(4) + 4^2$$

Por lo tanto, podemos decir que:

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

Lo que significa que hemos factorizado al trinomio $x^2 + 8x + 16$; ya que:

$$(x+4)^2 = (x+4)(x+4)$$

Otro ejemplo:

¿Cómo podríamos factorizar al trinomio $x^2 - 10x+25$?
Para hacerlo, tendríamos que completar la tabla.

•	x	
x	x^2	
		25

$x^2 - 10x + 25$

Algunas posibilidades son:

a)

•	x	-5
x	x^2	-5x
-5	-5x	25

$x^2 - 10x + 25$

b)

•	x	25
x	x^2	25x
1	x	25

$x^2 + 26x + 25$

c)

•	x	-25
x	x^2	25x
-1	-x	25

$x^2 + (-26x) + 2$

d)

•	x	5
x	x^2	5x
5	5x	25

$x^2 + 10x + 25$

Podemos ver que la primera tabla es la correcta, verifiquemos el resultado.

•	x	-5
x	x^2	-5x
-5	-5x	25

$$(x - 5)^2 = x^2 + 2(x)(-5) + (-5)^2$$
$$= x^2 - 10x + 25$$

EJERCICIOS:

a) Utiliza cada tabla para completar la expresión

•	x	1
x	x^2	x
1	x	1

$x^2 + 2x + 1 =$ ________

•	x	-2
x	x^2	$-2x$
-2	$-2x$	4

$x^2 - 4x + 4 =$ ________

•	x	-3
x	x^2	$-3x$
-3	$-3x$	9

$x^2 - 6x + 9 =$ ________

b) Obtén el trinomio cuadrado perfecto a partir de los siguientes binomios.

$(4x^2 + 1)^2 =$ ________________

$(12x + y)^2 =$ ________________

$(1 + x)^2 =$ ________________

$(5m + 2)^2 =$ ________________

$(x + y)^2 =$ ________________

c) Factoriza los siguientes trinomios.

$x^2 + 6xy + 9y^2 =$ ________________

$a^2 - 2a + 1 =$ ________________

$a^2 - 2ab + b^2 =$ ________________

$25a^2 + 30ab + 9b^2 =$ ________________

$4b^2 + 28b + 49 =$ ________________

d) Auxiliándote de la tabla, escribe el binomio al cuadrado y su resultado sobre la línea.

•	x	-7
x	x^2	-7x
-7	-7x	49

$(x - 7)^2 =$ ______________________________

•	3m	1
3m	$9m^2$	3m
1	3m	1

____

•	y	-8
y	y^2	-8y
- 8	-8y	64

____

e) Calcula el valor de $f(x) = x^2 + x$ para los valores dados de x y completa la tabla.

Ejemplo:

Para: $x = -4$

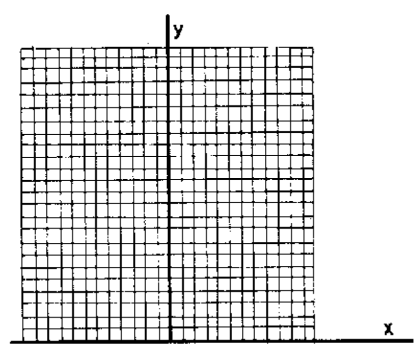
$f(x) = f(-4) = (-4)^2 + (-4) = 16-4 = 12$

Para: $x = 1$

$f(x) = f(1) = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

x	f(x)
-5	
-4	12
-3	
-2	2
-1	
0	
+1	2
+2	
+3	

g) Con los datos de la tabla anterior, encuentra puntos de la gráfica de f(x)



¿Para qué valores de x, f(x) es igual a cero? ______________________________

DIFERENCIA DE CUADRADOS Y SU FACTORIZACION.

Expresiones como:

$$25 - 100$$

$$x^2 - w$$

$$x^2 - 16$$

Reciben el nombre de diferencia de cuadrados.

Para factorizarlos, debemos recordar que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

O bién: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, es decir:

Cualquier diferencia de cuadrados es igual a un producto de binomios conjugados.

Veamos cómo podemos utilizar este resultado para factorizar una diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

1) Factoricemos: $25 - 100$

Solución:

25 es el cuadrado de: 5
100 es el cuadrado de: 10

Así: $25-100 = (5+10)(5-10)$

Verifiquemos:

$25 - 100 = -75$

$(5 + 10)(5 - 10) =$

$(15)(-5) = -75$

$$-75 = -75$$

Al utilizar una tabla, podríamos verlo así:

•	5	-10
5	25	-50
10	50	-100

$$(5 + 10)(5 - 10) = 25+50 + (-50) + (-100)$$
$$= 25+[(50 + (-50)] + (-100)$$
$$= 25+0 + (-100)$$
$$= 25-100$$

2) Factoricemos: $x^2 - 36$

Solución:

x^2 es el cuadrado de: x
36 es el cuadrado de: 6

Así:

$$x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$$

EJERCICIOS:

a) Factoriza las siguientes expresiones:

$x^2 - 4 =$

$16 - 9 =$

$9m^2 - 9 =$

$100-36 =$

$x^2 - y^2 =$

b) Completa las siguientes expresiones:

$(x + 9)(x - 9) =$ ______________

______________ $= x^2 - 25$

$(y^2 + 3)($__ $- 3) =$ ______________ -9

$(x + 2)(x - 2) =$ ______________

______________ $= a^2 - 4b^2$

FACTORIZACION DE TRINOMIOS DE LA FORMA
$x^2 + bx + c$

Para recordar que en páginas anteriores multiplicamos binomios con un término en común y presentamos la siguiente forma:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$$

Cuadrado del término común.

Producto de la suma de los términos no comunes y del término común.

Producto de los términos no comunes.

Nuestro problema ahora es un proceso invertido a la multiplicación, encontrar los factores dado el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ ó bien $x + (a + b)\ x + ab$

Si observamos la forma anterior, nos sugiere encontrar dos números que multiplicados den (ab) y sumados $(a + b)$. Veámoslo en un ejemplo:

Factoricemos: $x^2 - x - 6$

Cuadrado del término común

Producto de los términos

Producto de la suma de los términos no comunes y del término común.

Por lo tanto:

x^2 es el cuadrado de: x

$-\ 6$ es producto de: $(1)(-6),\ (2)(-3)$

$(-1)(6),\ (-2)(3)$

de las anteriores parejas de números los únicos que sumados dan -1 son (2) y (-3)

$$x^2 - x - 6$$

$\boxed{x.x}$ $\boxed{(2-3)\ x}$ $\boxed{(2)(-3)}$

La factorización de $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

Realicemos otros ejemplos:

Factoricemos: $x^2 + 2x - 3$

Busquemos dos números que sumados den 2 y multiplicados den $-\ 3$

x^2 es cuadrado de: x

$-\ 3$ es producto de: $(-1)(3)$ y de $(1)(-3)$

de las anteriores parejas de números elegimos -- (-1) y (3) ya que $-\ 1 + 3 = 2$ y $(-1)(+3) = -\ 3$

$$x^2 + 2x - 3$$

$\boxed{x.x}$ $\boxed{(\ +\ )\ x}$ $\boxed{(\quad)(\quad)}$

entonces:

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

Factoricemos: $x^2 + 3x + 2$

x^2 es cuadrado de: x
2 es producto de: $(1)(2)$ y $(-1)(-2)$

de las dos parejas anteriores escogemos $(1)(2)$ -
Ya que: $1 + 2 = 3$ y $(1)(2) = 2$

Entonces: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

$$\underbrace{x^2}_{\boxed{x.x}} + \underbrace{3x}_{\boxed{(\ +\ )\ x}} + \underbrace{2}_{\boxed{(\quad)(\quad)}}$$

EJERCICIOS:

a) Escribe el término que falta en los polinomios que se encuentran abajo de cada figura.

•	z	8
z	z^2	8z
20	20z	160

$(z+8)(z+20) = z^2 + (\quad) z + 160$

•		
	x^2	-x
	-4x	4

$(x \quad)(x \quad) = x^2 - 5x + 4$

•	a	b
a	a^2	
c		

$(a + b)(a + c) = a^2 +$ ____ $+$ ____

b) Encuentra dos números cuyo:
. producto dé 24 y su suma 11

$(\quad)(\quad) = 24$ y ____ + ____ = 11

. producto dé -4 y su suma 3

$(\quad)(\quad) = -4$ y ____ + ____ = 3

. producto dé 30 y su suma 11

$(\quad)(\quad) = 30$ y ____ + ____ = 11

. producto -27 y su suma -6

$(\quad)(\quad) = -27$ y ____ + ____ = -6

c) Encuentra el resultado de las siguientes multiplicaciones.

$(p + 3)(p + 13) =$

$(b + 8)(b - 5) =$

$(x + 9)(x + 7) =$

$(x + 14)(x - 5) =$

d) Factoriza los siguientes polinomios.

$x^2 + 5x + 6 = (\quad)(\quad)$

$y^2 + 6y - 55 = (\quad)(\quad)$

$b^2 + 9b + 20 = (\quad)(\quad)$

$x^2 + 9x - 70 = (\quad)(\quad)$

$y^2 - 14y - 51 = (\quad)(\quad)$

e) Encuentra los valores de $f(x) = x^2 + 3x + 2$

Si x es 3,2,1,0,-1 y -2

x	y
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	

OTRAS FACTORIZACIONES.

El procedimiento previamente visto nos es útil para factorizar trinomios donde x^2 tiene coeficiente 1 ¿Qué sucede si el coeficiente es diferente de 1?

¿Cómo factorizamos $5x^2 - 9x - 2$?

Al - 2 lo podemos factorizar como (1)(-2) y (-1)(2), si sumamos los números en cada pareja ninguna da como resultado - 9

$1 - 2 \neq -9$ y $-1 + 2 \neq -9$

Un método para factorizar este tipo de polinomios es el siguiente:

$$5x^2 - 9x - 2$$

- Multipliquemos	$(5)(-2) = -10$
- Debemos pensar en dos números que multiplicados den - 10	$(1)(-10)$, $(-1)(10)$ $(2)(-5)$, $(-2)(5)$
- De las parejas anteriores, escojamos aquella que sumados los números den - 9 (éste es el coeficiente de x)	$(1) + (-10) = -9$
- Sustituyamos a - 9 por los coeficientes 1 y - 10	$5x^2 + (-10 + 1)x - 2$
- Multipliquemos (1-10) por x	$5x^2 - 10x + x - 2$
- Factoricemos $5x^2 - 10x$ y $x - 2$	$5x(x - 2) + 1(x - 2)$

- Nuevamente factoricemos, (nota que el factor común es $x - 2$). $(x - 2)(5x + 1)$

  Por lo tanto: $5x^2 - 9x - 2 = (x-2)(5x+1)$

Verifiquemos:

$$(x-2)(5x+1) = x(5x+1) + (-2)(5x+1)$$

$$= 5x^2 + x - 10x - 2$$

$$= 5x^2 - 9x - 2$$

Trataremos de factorizar el trinomio $3x^2 + 13x - 30$
Por el método de ensayo y error, deberíamos de multiplicar a 3 por -30. Después, factorizar al resultado y buscar un par de factores, tales que la suma sea -13.

Si seguimos este procedimiento, al multiplicar (3) por (-30) el producto es -90 y éste número tiene 24 posibles factores.

Sigamos otro procedimiento para encontrar ese par de factores.

Démosle los nombres de d y e a dichos factores. Entonces:

$$3x^2 + 13x - 30 = 3x^2 + dx + ex - 30$$

donde: $de = -90$ y $d + e = 13$

Sabemos que:

$(d-e)^2 = (d+e)^2 - 4de$ porque $(d^2 - 2de + e^2) = (d^2 + 2de + e^2) - 4de$
$= d^2 - 2de + e^2$

$(d-e)^2 = 13^2 - 4(-90)$ entendamos que $(d+e)^2 = 13^2$ y $de = -90$

$(d-e)^2 = 169 + 360$

$(d-e) = \sqrt{529}$

$d-e = \pm\sqrt{529} = \pm 23$

Consideremos, ahora el siguiente sistema de ecuaciones. Al primero, resolvámoslo sumando; al segundo, restando.

$$\begin{array}{rl} & d + e = 13 \\ + & \\ & \underline{d - e = 23} \\ & 2d = +36 \\ & d = +18 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & d + e = 13 \\ - & \\ & \underline{d - e = 23} \\ & 2e = -20 \\ & e = -5 \end{array}$$

Un polinomio de grado n ($p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots a_1 x + a_0$) será reducible cuando lo podamos expresar como producto de dos polinomios de grado, al menos 1 y menor que n.

Ejemplo:

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

El polinomio $x^2 - 4$ es de **grado** 2 y se puede expresar como producto de dos polinomios lineales. Por lo tanto, se dice que es reducible

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x+4)(x-2)(x+1)$$

Su grado es 3 y se puede factorizar en 3 polinomios lineales. Por lo tanto, es reducible.

$x^2 - \frac{4}{9}$ se dice que es reducible porque se puede factorizar como el producto de dos polinomios lineales.

$$x^2 - \frac{4}{9} = (x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{3})$$

Los polinomios que no se pueden expresar como producto de polinomios lineales se nombran irreducibles. Por ejemplo:

$$x^2 - 2$$

Al factorizarlo tendríamos:

$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ y $\sqrt{2}$ no es un número racional.

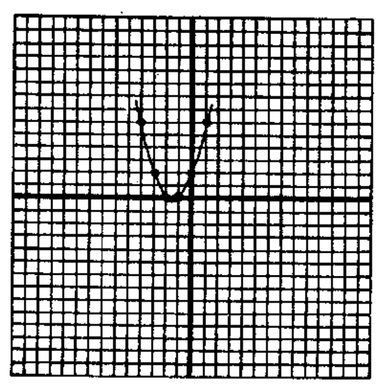
GRAFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES.

Los factores de una función polinomial, y la gráfica de ésta, guardan una interesante relación. Veamos que sucede.

Tracemos la gráfica de la siguiente función:

$$P(x) = x^2 + 3x + 2$$

x	p(x)
-4	6
-3	2
-2	0
-1	0
0	2
1	6



Realicemos la factorización del trinomio $x^2 + 3x + 2$

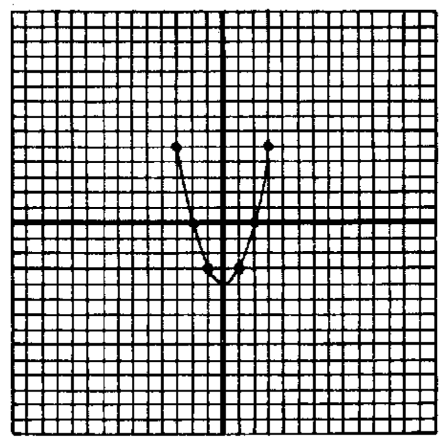
$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$$

¿Qué observas de la gráfica y los factores $(x+2)$ y $(x+1)$?

Grafiquemos:

$D(x) = x - 4$ para x de -3 a 3

x	D(x)
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



La factorización del polinomio $x^2 - 4$ es la siguiente:

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

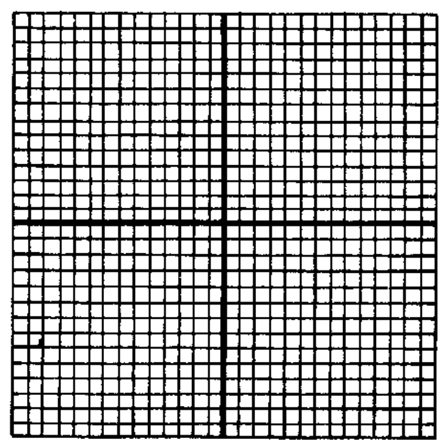
¿Qué observas en la gráfica con relación a los factores del polinomio?

EJERCICIOS:

Para cada caso, completa las tablas y grafica los valores correspondientes.

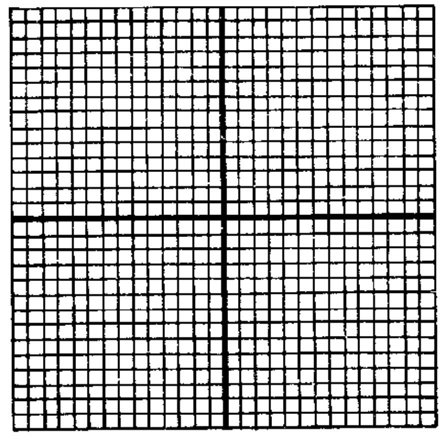
a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

x	f(x)
-5	
-4	
0	
4	
5	



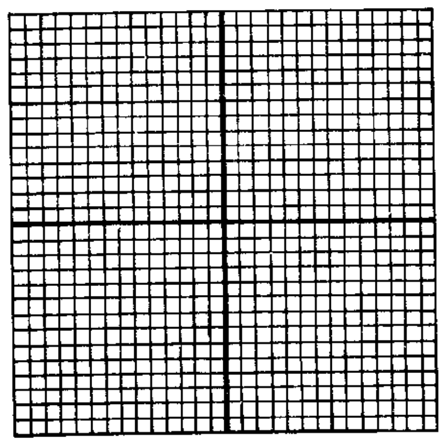
b) $f(x) = 10x^2 + 7x - 12$

x	f(x)
-20	
-15	
-10	
0	
10	
15	
20	



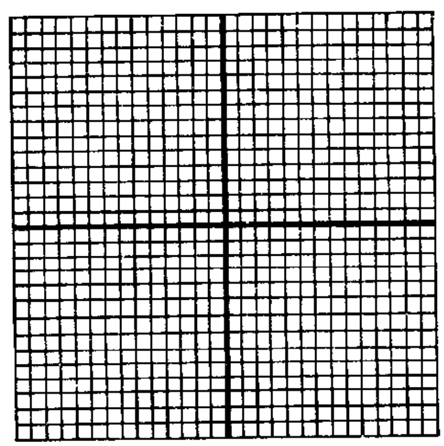
c) $P(a) = a^2 - 36$

x	P(a)
-6	
-3	
0	
3	
6	



d) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

x	f(x)
-3	
-1	
0	
1	
3	



¿Qué diferencia observas en este caso con respecto a las gráficas anteriores?

unidad 3

ecuaciones de segundo grado

ESTAMOS EN LA SITUACION HABITUAL DE LOS CIENTIFICOS QUE HAN DE CONTENTARSE CON MEJORAS FRAGMENTARIAS; PODEMOS HACER ALGUNAS COSAS MAS CLARAS, PERO NO PODEMOS HACER NADA CLARO.

FRANK PLUMPTON RAMSEY.

I N T R O D U C C I O N

En la quinta y sexta unidad del segundo curso de matemáticas, se desarrollaron respectivamente los -- conceptos de ecuaciones de primer grado (ecuaciones de la forma $ax + b = c$) y sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables (sistemas con ecuaciones de la forma $ax + by = c$). Para estos conceptos - se presentaron también los métodos geométricos y algebraicos de solución.

En esta unidad se desarrollará el concepto de -- ecuación cuadrática o de segundo grado en una variable (ecuaciones de la forma $ax^2 + bc + c = 0$), su -- clasificación en ecuaciones completas y ecuaciones - incompletas; así como algunos métodos de solución, - tanto algebraicos como geométricos.

Se concluirá con algunas aplicaciones de las - - ecuaciones de segundo grado en situaciones de la vida real.

OBJETIVOS PARTICULARES:

* Aplicará el despeje y la factorización en la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

* Aplicará la fórmula a la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

* Construirá la gráfica de ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c = y$

* Resolverá problemas de aplicación de los conceptos estudiados en esta unidad.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Identificará ecuaciones de segundo grado, como funciones cuadráticas.

- Clasificará las ecuaciones de segundo grado, en completas e incompletas.

- Resolverá ecuaciones de la forma: $ax^2 + c = 0$, aplicando las propiedades de la igualdad.

- Calculará las raíces de una ecuación de segundo grado, mediante la factorización.

- Resolverá ecuaciones cuadráticas, complementando el trinomio cuadrado perfecto.

- Obtendrá la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.

- Resolverá problemas que den lugar a ecuaciones de segundo grado.

- Tabulará expresiones de la fórmula: $ax^2 + bx + c = y$ para diferentes valores de x.

- Trazará la gráfica de ecuaciones cuadráticas, a partir de tabulaciones realizadas.

- Resolverá ecuaciones de segundo grado, mediante su representación gráfica.

UN PROBLEMA

Con motivo de su cumpleaños, Alejandra preparó una fiesta a la cual asistieron varios de sus amigos. Daniel, uno de sus invitados observó que los saludos -- fueron 66. ¿Podríamos con esta información conocer el número de asistentes a dicha reunión?

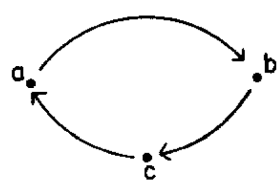
Para hacerlo consideramos lo siguiente:

1. a). Si el número de asistentes fuera dos, el - número de saludos sería 1.

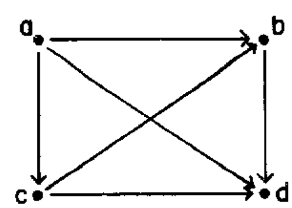
"a" saluda a "b"
o "b" saluda a "a"

b). Si el número de asistentes fuera tres, el - número de saludos serían 3

"a" saluda a "b"
"a" saluda a "c"
"b" saluda a "c"

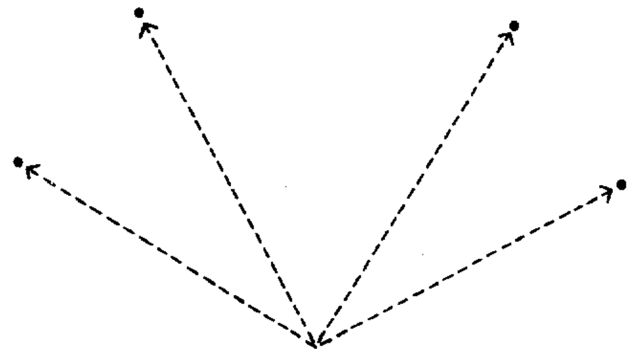


c). Si el número de asistentes fuera cuatro, - el número de saludos serían 6



Observa que si representamos al número de saludos por S y al número de asistentes por n, tenemos la tabla:

n	S
1	0
2	1
3	3
4	6
5	



d). ¿Cuántos saludos se tendrían si n = 5?
Si n = 5, diríamos que ha llegado un quinto amigo a la reunión, el cual saludará a cada uno de los ya reunidos, que eran 4
Si 4 amigos se saludan entre sí, los saludos son 6 (según la tabla). Al incluir un amigo más, el número de saludos será: 6 + 4 = 10

e). Observa ahora lo siguiente:

n	S
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

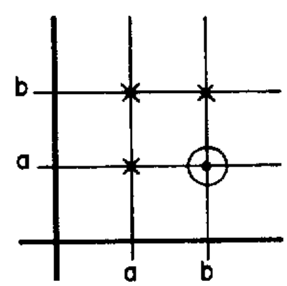
Pregunta:

¿Cuántos saludos habría si el número de asistentes fuera de 6?

____

2. Utilicemos, ahora, una gráfica cartesiana para plantear el problema.

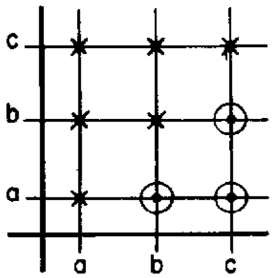
" a "saluda a "b"
equivale a "b"saluda a "a"

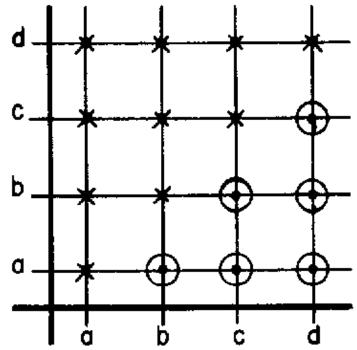


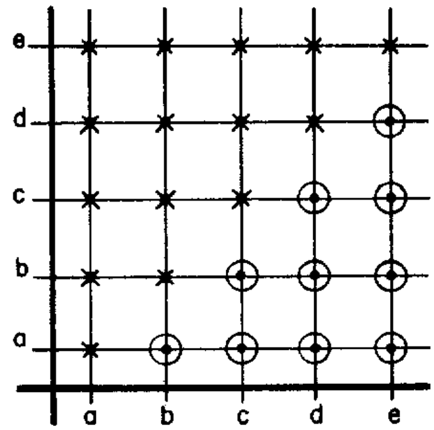
Dos amigos (a y b)
un saludo

Eliminamos:

a saluda a a
b saluda a b







Tres amigos: ("a","b"y"c") tres saludos.

Cuatro amigos: ("a","b","c"y"d") seis saludos.

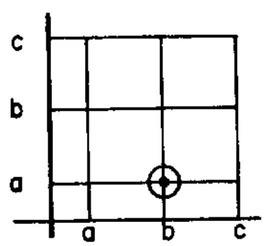
Cinco amigos: diez saludos.

De estas gráficas cartesianas, podemos decir que:

1) Los amigos reunidos se indican por las letras: a,b,c,d,...

2) Cada punto de las gráficas indica " ...saluda a... "

Ejemplo:

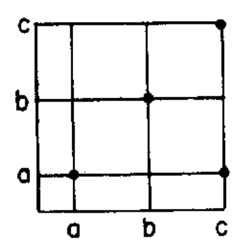


"b saluda a a"

3) En cada gráfica sólo se consideran los saludos representados por puntos encerrados en círculo

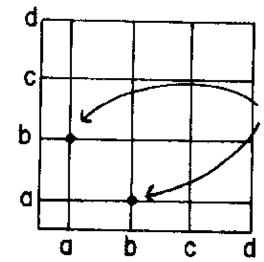
No se cosideran los puntos de la diagonal

Ejemplo:



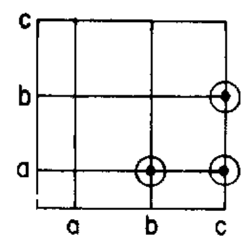
"c saluda a c"
no tiene sentido
(Alejandra se saluda a sí misma)

"a" saluda a "b" equivale a "b" saluda a "a"



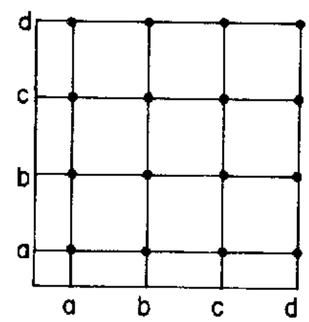
4) El número de saludos es el total de puntos encerrados en círculo

Total de saludos = 3



5) El número de saludos es igual a:

El total de puntos de la gráfica menos los puntos de la diagonal; dividido entre dos.



Si n = número de amigos reunidos, entonces el número de saludos es igual a: $\frac{n^2 - n}{2}$

¿Por qué? ________________________

Así, nuestro problema original se reduce a resolver la ecuación:

$$\boxed{\frac{n^2 - n}{2} = 66}$$

Es decir: encontrar un número $\underline{\underline{n}}$ (total de amigos) de tal manera que se satisfaga la ecuacion $\frac{n^2 - n}{2} = 66$

En esta unidad presentaremos la herramienta que te permitirá resolver este tipo de ecuaciones. Para ello, los contenidos serán:

- Ecuaciones cuadráticas y su clasificación.

- Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas; aplicando el concepto de raíz cuadrada, factorizando, completando cuadrados y aplicando la fórmula general.

- Funciones cuadráticas y su representación gráfica.

ECUACIONES CUADRATICAS Y SU CLASIFICACION.

En tus cursos anteriores, aprendiste a resolver ecuaciones como:

$x + 6 = 10$ (solucion: $x = 4$)

$3x - 1 = 20$ (solución: $x = 7$)

$\frac{y}{2} = 16$ (solución: $y = 32$)

También, viste que estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de primer grado con una variable.

De igual manera, aprendiste que:

$$x + y = 15$$
$$2x - y = 6$$

representan ecuaciones de primer grado con dos variables.

Ahora, pondremos atención en ecuaciones del tipo:

$$x^2 = 25$$
$$x^2 - x = 30$$
$$\frac{x^2 - x}{2} = 66$$

A este tipo de ecuaciones le llamaremos: Ecuaciones de segundo grado con una variable.

Otros ejemplos de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado son:

$$5x^2 + 8x - 10 = 0$$
$$2x^2 = 3x - 6$$
$$0 = 5x^2 - 10$$
$$2x - 8 = -3x^2$$
$$10x^2 + 6x - 10 = 2x$$

En general:

> Una ecuación de segundo grado en una variable es una ecuación del tipo:
>
> $$ax^2 + bx + c = 0$$
>
> en la que $a, b, c \in R$ (conjunto de números reales) y $a \neq 0$

En la ecuación de segundo grado, cada término recibe un nombre:

ax^2	recibe el nombre de término cuadrático
bx	recibe el nombre de término lineal
c	recibe el nombre de término independiente

Ejemplos:

(1) $3x^2 + x + 1 = 0$

(2) $-5x^2 + 10 = 0$

(3) $2x^2 + x = 0$

(4) $x^2 - 36 = 0$

(5) $- x^2 = 0$

(6) $x - 35 = x^2$

En la ecuación (1)

$a = 3$; $b = 1$; $c = 1$

$$\underset{\overset{\uparrow}{a}}{3}\,x^2 + \underset{\overset{\uparrow}{b}}{1}\,x + \underset{\overset{\uparrow}{c}}{1} = 0$$

En la ecuación (2)

$a = -5$; $b = 0$; $c = 10$

$$\underset{\overset{\uparrow}{a}}{-5}x^2 + \underset{\overset{\uparrow}{c}}{10} = 0$$

En la ecuación (3)

$a = 2$; $b = 1$; $c = 0$

$$\underset{\overset{\uparrow}{a}}{2}x^2 + \underset{\overset{\uparrow}{b}}{1}\,x = 0$$

Cada término está formado por una constante y una variable, las constantes se representan así:

a	es el coeficiente del término cuadrático
b	es el coeficiente del término lineal
c	es el término independiente.

En la ecuación (4)

$a = 1$; $b = 0$; $c = - 36$

En la ecuación (5)

$a = -1$; $b = 0$; $c = 0$

¿Cuáles son los coeficientes a, b y c en la ecuación (6)?

Para responder esta pregunta, se requiere escribir la ecuación dada:

$x - 35 = x^2$ en la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Veamos cómo podemos lograrlo:

$x-35 = x^2$	Ecuación original
$(-x^2)+(x-35)=(-x^2)+x^2$	Sumando a cada miembro el inverso aditivo de x^2
$-x^2+x-35=(-x^2)+x^2$	Quitando paréntesis en el primer miembro
$-x^2+x-35=0$	Propiedad del inverso aditivo.

Así:

$-x^2+x-35=0$

término lineal

término cuadrático

término independiente

$-x^2+x-35=(-1)x^2+1(x)+(-35)$

a=-1 b=1 c=-35

Observa que, en cada ecuación dada, el coeficiente del término cuadrático es -- diferente de cero.

EJERCICIOS:

a) Anota, en cada paréntesis, un 1 (si la ecuación es cuadrática) o un 0 (si la ecuación no lo es)

$x^2 = 100$	( )
$3x^2-8x = 5$	( )
$x-4 = 10$	( )
$4 = x^2+x$	( )
$x^3-x^2+3x = 0$	( )
$x+y = 0$	( )
$0 = x^2-49$	( )
$x^3-27 = 0$	( )
$0 = 8x-64$	( )
$x^4 = 16$	( )

b) Para cada ecuación dada, anota el valor del coeficiente cuadrático, lineal e independiente.

$4x^2+8x-6=0$ Coeficiente del término cuadrático
$a = 4$
Coeficiente del término lineal:
$b = 8$
Término independiente
$c = -6$

$-x^2-x+1 = 0$
a=___, b= ___, c= ___

$-2x^2+2x = 0$
a=___, b=___ , c= ___

$3x^2-10 = 0$
a=___, b= ___, c= ___

$+x^2-81+2x = 0$
a=___, b= ___, c= ___

$-3x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=0$
a=___, b= ___, c= ___

$x^2+.5x+.25 = 0$
a=___, b= ___, c= ___

$x^2= -3x+6$
a=___, b= ___, c= ___

De los ejercicios anteriores, así como de la definición, podemos concluir que: en una ecuación de 2o. grado con una variable:

1. El mayor exponente es 2 y corresponde al término cuadrático.

2. El coeficiente del término cuadrático debe ser diferente de cero.

3. El coeficiente del término lineal y el término independiente pueden ser ceros.

Así:

a) $3x^3 + 2x^2 = 0$	No es una ecuación de 2o. grado, ya que su máximo exponente es 3.
b) $x + 5 = 0$	No es una ecuación de segundo grado, el máximo exponente es 1. Recuerda que: $x^1 = x$.
c) $2x^2 + 4x + 10 = 0$	Sí es una ecuación de segundo grado, su máximo exponente es 2.
d) $x^2 - 18 = 0$	Sí es una ecuación de segundo grado, su máximo exponente es 2. Observa que $a = 1$ $b = 0$ $c = -18$ No tiene término lineal.
e) $x^2 - 2x = 0$	Sí es una ecuación de segundo grado, su máximo exponente es 2. Observa que $a = 1$ $b = -2$ $c = 0$ No tiene término independiente.

CLASIFICACION DE ECUACIONES CUADRATICAS.

El siguiente esquema nos servirá para clasificar a las ecuaciones de segundo - grado.

ECUACIONES CUADRATICAS

$a\,x^2 + b\,x + c = 0$

INCOMPLETAS			COMPLETAS
$a\,x^2 = 0$	$a\,x^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
$a \neq 0$ $b = c = 0$	$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c = 0$	$a \neq 0$ $b = 0$ $c \neq 0$	$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$
Ejemplos $x^2 = 0$ $3x^2 = 0$ $-100x^2 = 0$	Ejemplos $5x^2 + 4x = 0$ $3x^2 = 6x$ $9x^2 - 12x = 0$	Ejemplos $6x^2 + 3 = 0$ $x^2 = 64$ $5x^2 = 9$	Ejemplos $9x^2 + 6x - 2 = 0$ $5x^2 - 4x + 6 = 0$ $7x^2 + 3x - 1 = 0$

Como podemos observar, del esquema anterior:

Las ecuaciones de segundo grado se clasifican en :

INCOMPLETAS Y COMPLETAS

a) Las ecuaciones completas son aquellas que tienen:

término cuadrático
término lineal y
término independiente

es decir:

Una ecuación completa de segundo grado es una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ en la cual a, b y c son diferentes de cero.

Ejemplos de ecuaciones completas de segundo grado son:

$9x^2+6x-2=0$

$5x^2-4x+2=0$

$7x^2=3x-10$

$-5=x^2+x$

b) Las ecuaciones incompletas de segundo grado son aquellas que carecen de, al menos uno, de los términos: lineal o independiente.

Es decir:

Una ecuación incompleta de segundo grado es una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ en la cual $a \neq 0$ y, al menos, se cumple una de las siguientes condiciones: $b=0$ o $c=0$

Caso 1

Ecuaciones incompletas sin término lineal ni término independiente.

Este tipo de ecuaciones es de la forma: $ax^2=0$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ -x^2 &= 0 \\ 5x^2 &= 0 \\ -10x^2 &= 0 \\ 0 &= -3x^2 \\ 0 &= 4x^2 \end{aligned}$$

Caso 2

Ecuaciones incompletas sin término lineal.

Este tipo de ecuaciones es de la forma: $ax^2+c=0$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} x^2-121 &= 0 \\ -x^2+100 &= 0 \\ x^2-1 &= 0 \\ 4x^2 &= 144 \\ x^2 &= -80 \\ 0 &= x^2-321 \end{aligned}$$

Caso 3

Ecuaciones incompletas sin término independiente.

Este tipo de ecuaciones es de la forma: $ax^2+bx=0$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} x^2+x &= 0 \\ 2x^2-3x &= 0 \\ -x^2 &= -5x \\ 0 &= -x^2+100x \\ 81x &= -3x^2 \\ 8x-x^2 &= 0 \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

a) Para cada una de las ecuaciones de segundo grado dadas anota en el paréntesis la letra C, si es completa; o la letra I, si es incompleta.

$x^2 + x - 10 = 0$	( )
$-3x^2 = x$	( )
$x-100+4x^2 = 0$	( )
$2x^2+9-x = 0$	( )
$x^2 = 9$	( )
$x^2-19 = 0$	( )
$3x^2+6x-11 = 0$	( )
$3 = x^2 - 11$	( )

b) Para cada una de las ecuaciones siguientes, indica cuál es el término que falta.

Ejemplo:

$x^2+10x = 0$

Falta el término independiente

$x^2 = 10$

____

$3x^2+2 = 0$

____

$0 = 3x^2 -6$

____

$3x = 4x^2$

____

c) Escribe el nombre correspondiente a cada término de las siguientes ecuaciones cuadráticas y determina si la ecuación es completa o incompleta.

$3x^2+2x-30 = 0$

$3x^2$ ____________________

$2x$ ____________________

-30 ____________________

Ecuación ____________________

$x^2-81 = 0$

x^2 ____________________

-81 ____________________

Ecuación ____________________

$4x^2 - 16 = 0$

$4x^2$ ____________________

-16 ____________________

Ecuación ____________________

$5x^2-9x + 11 = 0$

11 ____________________

$-9x$ ____________________

$5x^2$ ____________________

Ecuación ____________________

$11x^2 - 3x = 0$

$-3x$ ____________________

$11x^2$ ____________________

Ecuación ____________________

SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

En el Estado de México existe un poblado de nombre Temoaya, cuyo significado -es:

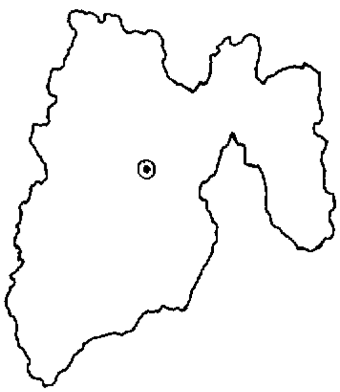
Temoaya:

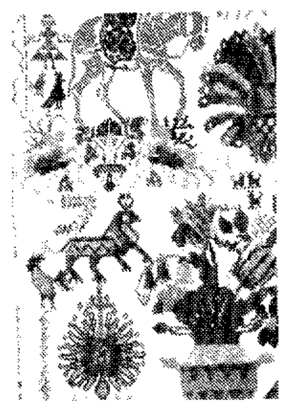
temoa, bajan

yan, lugar

"Por donde todos bajan"

en este lugar se asienta una parte de población otomí. Ahí se elaboran tapetes -- anudados a mano, cuya distinción, belleza y calidad puede compararse con la de los tapetes y alfombras persas.





Pregunta:

Si se desea elaborar un tapete para cubrir un piso de forma cuadrada cuya superficie sea de 36 m^2 ¿Cuánto deberá medir cada lado del tapete?

Para contestar la pregunta, recordemos que el área de un cuadrado está dada por la fórmula:

$$A = (\text{lado})^2 = \ell^2$$

Así, si el área del cuadrado es igual a 36, el problema original se reduce a - encontrar un número $\underline{\underline{\ell}}$ cuyo cuadrado sea igual a 36. Es decir, se reduce a resol-- ver la ecuación: $\ell^2 = 36$

Para resolverla, requerimos encontrar un número cuyo cuadrado sea 36. Claramente este número es $\underline{6}$ ya que

$$6^2 = 6x6 = 36$$

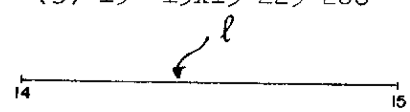
El tapete deberá medir 6 m. por lado

¿Cuánto deberá medir por lado un tapete para cubrir un área de 200 m^2?

Podemos intentar, encontrar un número cuyo cuadrado sea igual a 200

(1) $13^2 = 13x13 = 169 < 200$
(2) $14^2 = 14x14 = 196 < 200$
(3) $15^2 = 15x15 = 225 > 200$

De (2) y (3) podemos decir que el lado deberá tener una medida mayor que 14 m. y menor que 15m.

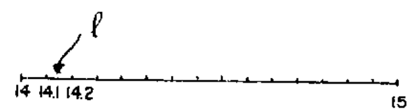


Probemos nuevamente:

(4) $14.1^2 = 14.1x14.1 = 198.81 < 200$
(5) $14.2^2 = 14.2x14.2 = 201.64 > 200$

Por lo tanto:

El lado deberá tener una medida entre 14. 1 m. y 14.2 m.



El siguiente principio nos resultará de gran importancia para resolver ecuaciones del tipo: $x^2 = b$, en las que (x) es la variable y b es una constante.

$$\boxed{\text{Si } x^2 = b, \text{ entonces } x = \pm\sqrt{b}}$$

Ejemplos:

¿Cuáles son las soluciones de:

a) $x^2 = 81$?

$x = \pm\sqrt{81} = \pm 9$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{81} & 9 \\ -81 & 18 \\ 0 & \end{array}$$

b) $x^2 = 100$?

$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{100} & 10 \\ -1 & 20 \\ 000 & \end{array}$$

c) $w^2 = 36$?

$w = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{36} & 6 \\ -36 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

d) $z^2 = 121$?

$z = \pm\sqrt{121} = \pm 11$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{121} & 11 \\ -21 & 21 \\ 0 & \end{array}$$

e) $p^2 = 200$

$p \doteq \pm\sqrt{200} = \pm\ 14.14$

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{200{,}00} & 14.14 \\ \hline
-1 & 24 \\ \hline
100 & 281 \\ \hline
-96 & 28.24 \\
400 & \\
-281 & \\
11900 & \\
-11296 & \\
604 &
\end{array}
$$

En el inciso (e): $p \doteq \pm 14.14$, el símbolo $\doteq$ significa "aproximadamente igual a"

La razón se desprende al encontrar el producto.
14.14x14.14

$$
\begin{array}{r}
14.14 \\
\times\ 14.14 \\ \hline
56\ 56 \\
141\ 4\ \ \\
5656\ \ \ \ \\
1414\ \ \ \ \ \ \\ \hline
199.9396
\end{array}
$$

Puedes ver que: $199.9396 \doteq 200$

La notación $x = \pm a$ significa que x tiene dos valores: uno positivo y otro negativo.

De aquí en adelante, utilizaremos indistintamente la notación:

$$x = \pm a \quad ó \quad \begin{array}{l} x_1 = +a \\ x_2 = -a \end{array}$$

a) Si $x^2 = 25$, $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ o bien, $x_1 = +5$
$x_2 = -5$

b) Si $u^2 = 144$, $x = \pm\sqrt{144} = 12$ o bien, $x_1 = +12$
$x_2 = -12$

Una ecuación de la forma $x^2 = c$ tiene por soluciones a: $x_1 = \sqrt{c}$ $x_2 = -\sqrt{c}$

EJERCICIOS:

a) Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

Ejemplo:

$d^2 = 49$	$d_1 = +7$ $d_2 = -7$
$m^2 = 169$	$m_1 =$ $m_2 =$
$p^2 = 10,000$	$p_1 =$ $p_2 =$
$x^2 = 64$	$x_1 =$ $x_2 =$
$t^2 = 1305$	$t_1 =$ $t_2 =$

Tres observaciones importantes sobre $\sqrt{c}$

1o. Si c es positivo $(c > 0)$
la raíz cuadrada de c tiene dos valores:
uno positivo y otro negativo.

2o. Si c es cero $(c = 0)$
La raíz cuadrada de c es igual a cero

3o. Si c es negativo $(c < 0)$
La raíz cuadrada de c no es un número real. Ya que no existe real alguno - cuyo cuadrado sea negativo.

Recuerda que:

a) $(\square)^2 = \square \times \square$ y además:
b) El producto de dos positivos es positivo: $(+)(+) = +$
c) El producto de dos negativos es positivo: $(-)(-) = +$
d) El producto de cero consigo mismo es cero: $(0)(0) = 0$

Esto último nos dice que:

La ecuación $x^2 = 16$ tiene <u>2</u> soluciones:

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$$

La ecuación $x^2 = 0$ tiene una solución:

$$x = 0$$

La ecuación $x^2 = -16$ <u>no</u> tiene solución en los reales

EJERCICIOS:

a) Para cada una de las ecuaciones siguientes anota en el paréntesis:
un 2, si la ecuación tiene 2 raíces reales.
un 1, si la ecuación tiene raíz cero.
un 0, si la ecuación <u>no</u> tiene raíz en los reales.

$x^2 = 64$ ( )

$x^2 = 0$ ( )

$x^2 = 130$ ( )

$x^2 = -1$ ( )

$x^2 = 36$ ( )

$w^2 = -36$ ( )

$w^2 = -64$ ( )

$\ell^2 = -0$ ( )

$m^2 = 225.16$ ( )

b) Escribe las soluciones de cada ecuación
Ejemplo:

$r^2 = 196$ $r_1 = 14$
$r_2 = -14$

$t^2 = 400$ $t_1 =$
$t_2 =$

$s^2 = 316$ $s_1 =$
$s_2 =$

$a^2 = 441$ $a_1 =$
$a_2 =$

$q^2 = 136$ $q_1 =$
$q_2 =$

c) Comprueba cada una de las soluciones encontradas en el inciso anterior.
Ejemplo:

$r^2 = 196$ $(14)^2 = 14 \times 14 = 196$
$r_1 = 14$
$r_2 = -14$ $(-14)^2 = (-14)(-14) = 196$

¿Cuál será la solución de la ecuación $2x^2 - 200 = 0$?

Para responder, analiza lo siguiente:

$2x^2 -100 = 0$	
$2x^2 +(-200) = 0$	Definición de sustracción
$[2x^2 +(-200)]+200 = 0+200$	Sumando 200 a cada miembro de la -- igualdad
$2x^2 +[(-200)+200]= 0+200$	Propiedad asociativa de la suma.
$2x^2 +0 = 0 + 200$	Propiedad del inverso aditivo
$2x^2 =200$	Propiedad del neutro aditivo
$\frac{1}{2}(2x^2) = \frac{1}{2}(200)$	Multiplicado a cada miembro por $\frac{1}{2}$
$[\frac{1}{2}(2)]\ x^2 = \frac{1}{2}\ (200)$	Propiedad asociativa de la multiplicación.
$x^2 = \frac{1}{2}\ (200)$	Multiplicado $\frac{1}{2}$ (2)
$x^2 = 100$	Definición de multiplicación
$x =\pm\sqrt{100}$	Propiedad de la raíz cuadrada
$x_1 = 10$	
$x_2 = -10$	Propiedad de la raíz cuadrada

El procedimiento anterior puede abreviarse, quedando:

$$2x^2 - 200 = 0$$
$$2x^2 = 200$$
$$x^2 = \frac{200}{2}$$
$$x^2 = 100$$
$$x =\pm\sqrt{100}$$

Por lo tanto:
$$x_1 = 10$$
$$x_2 =-10$$

Para comprobar las soluciones, se sustituyen los valores de la variable x en la ecuación original y se verifica si éstos la satisfacen

Veamos:

1) Con $x_1 = 10$

$$2x^2-200 = 0$$
$$2(10)^2-200 = 0$$
$$2(100)-200 = 0$$
$$200 -200 = 0$$
$$0 = 0$$

2) Con $x^2 = -10$

$$2x^2-200 = 0$$
$$2(-10)^2-200 = 0$$
$$2(100)-200 = 0$$
$$200 -200 = 0$$
$$0 = 0$$

En (1) y (2) se verifica que 10 y -10 satisfacen a la ecuación original ($2x^2 - 200 = 0$)

Otros ejemplos:

a) ¿Cuál es la solución de la ecuación: $3x^2 - 27 = 0$?

$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 0 \\ 3x^2 &= 27 \\ x^2 &= \frac{27}{3} \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -3$$

Comprobación:

1) Con $x_1 = 3$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 0 \\ 3(3)^2 - 27 &= 0 \\ 3(9) - 27 &= 0 \\ 27 - 27 &= 0 \end{aligned}$$

2) Con $x_2 = -3$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 0 \\ 3(-3)^2 - 27 &= 0 \\ 3(9) - 27 &= 0 \\ 27 - 27 &= 0 \end{aligned}$$

b) $5x^2 - 335 = 0$

Sumando 335 a cada miembro de la ecuación

$$(5x^2 - 335) + 335 = 0 + 335$$
$$5x^2 = 335$$

Dividiendo cada miembro de la ecuación entre 5

$$\frac{5x^2}{5} = \frac{335}{5}$$

$$x^2 = 67$$

Aplicando el concepto de raíz cuadrada

$$x = \pm\sqrt{67}$$
$$x \doteq \pm 8.18$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{67.00,00} & 8.18 \\ 300 & 161 \\ 139\ 00 & 1628 \\ 8\ 76 & \end{array}$$

Por lo tanto

$$x_1 = 8.18$$
$$x_2 = -8.18$$

Comprobación:

1) Para $x_1 \doteq 8.18$

$$5(8.18)^2 - 335 = 0$$
$$5(66.9124) - 335 = 0$$
$$334.5620 - 335 \doteq 0$$
$$-0.4380 \doteq 0$$

2) Para $x_2 = -8.18$

$$5(-8.18)^2 - 335 = 0$$
$$-0.4380 \doteq 0$$

Puedes ver que al hacer la comprobación, el resultado (-0.4380) es aproximadamente igual a cero. Esto es debido a que 8.18 es aproximadamente igual a $\sqrt{67}$.

En general:

Una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$ tiene por solución a: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Esto se debe a:

$ax^2+c=0$	
$(ax^2+c)+(-c)=0+(-c)$	Sumando a cada miembro el inverso aditivo de c.
$(ax^2+c)+(-c)=-c$	Propiedad del neutro aditivo
$ax^2+[c+(-c)]=-c$	Propiedad asociativa de la adición
$ax^2+0=-c$	Propiedad del inverso aditivo
$ax^2=-c$	Propiedad del neutro aditivo
$\frac{1}{a}(ax^2)= \frac{1}{a}(-c)$	Multiplicando a cada miembro por el inverso multiplicativo de a.
$[\frac{1}{a}(a)]\ x^2 = \frac{1}{a}\ (-c)$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$1(x^2) = \frac{1}{a}\ (-c)$	Propiedad del inverso multiplicativo
$x^2 = \frac{1}{a}\ (-c)$	Propiedad del neutro multiplicativo
$x^2 = \frac{-c}{a}$	Definición de multiplicación
$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$	Definición de raíz cuadrada

¿Cuál será la solución de la ecuación $3x^2 -9x = 0$?

Para responder, analiza lo siguiente:

$3x^2-9x=0$	
$3x(x-3)=0$	Sacando como factor común a 3x
Por lo tanto $\begin{cases} 3x=0 \\ \text{ó} \\ x-3=0 \end{cases}$	Propiedad de la multiplicación por cero

Así tenemos:

a) De $3x = 0$

$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(0)$	Multiplicando cada miembro por el inverso multiplicativo de 3
$[\frac{1}{3}(3)]x = \frac{1}{3}(0)$	Propiedad asociativa de la multiplicación.
$1x = \frac{1}{3}(0)$	Propiedad del inverso multiplicativo
$x = \frac{1}{3}(0)$	Propiedad del neutro multiplicativo
$x = 0$	Propiedad de la multiplicación por cero

b) De $x-3 = 0$

$x+(-3) = 0$	Definición de diferencia
$3+[x+(-3)] = 0+3$	Sumando a cada miembro el inverso aditivo de -3
$x+[(-3)+(3)] = 0+3$	Propiedad asociativa de la adición
$x+0 = 0+3$	Propiedad del inverso aditivo
$x = 3$	Propiedad del neutro aditivo.

En general:

¿Cuál será la solución de la ecuación $ax^2 + bx=0$?

Veamos:

$ax^2 + bx = 0$	
$x(ax+b) = 0$	Sacando a x como factor común

Por lo tanto:

$\left\{\begin{array}{r} x = 0 \\ \text{ó} \\ ax+b = 0 \end{array}\right.$	Propiedad de la multiplicación por cero

Así: $x_1 = 0$

$ax+b = 0$	
$(ax+b)+(-b) = 0+(-b)$	Sumando a cada miembro el inverso aditivo de b
$ax+[b+(-b)] = 0+(-b)$	Propiedad asociativa de la adición
$ax+0 = 0+(-b)$	Propiedad del inverso aditivo
$ax = -b$	Propiedad del inverso aditivo
$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(-b)$	Multiplicando a cada miembro por el inverso multiplicativo de a
$\frac{1}{a}(ax) = -\frac{b}{a}$	Definición de multiplicación
$[\frac{1}{a}(a)]x = \frac{-b}{a}$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$x_1 = \frac{-b}{a}$	Propiedad del inverso multiplicativo
$x_2 = \frac{-b}{a}$	Propiedad del neutro multiplicativo.

Así:

> Una ecuación de la forma, $ax^2+bx=0$ tiene por solución a:
>
> $$x_1 = 0$$
> $$x_2 = \frac{-b}{a}$$

Ejemplos:

a) Las soluciones de la ecuación $x^2+10x = 0$ son:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{-10}{1} = -10$$

(observa que en la ecuación original: $a = 1$ y $b = 10$)

Comprobación:

Con $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} 0^2+10(0) &= \\ 0\times 0+0 &= \\ 0+0 &= \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Con $x_2 = -10$

$$\begin{aligned} (-10)^2+10(-10) &= \\ (-10)(-10)-100 &= \\ 100-100 &= \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Concluimos, con esto, que los valores 0 y -10 para x satisfacen a la ecuación $x^2+10x=0$

b) Las soluciones de la ecuación $-15x^2+4x = 0$ son:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{-4}{-15} = \frac{4}{15}$$

Observa que en la ecuación $-15x^2+4x = 0$:

$$a = -15 \quad y \quad b = 4$$

Comprobación.

Con $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} -15(0)^2+4(0) &= \\ -15(0)+0 &= \\ 0+0 &= 0 \end{aligned}$$

Con $x_2 = \frac{4}{15}$

$$\begin{aligned} -15\left(\frac{4}{15}\right)^2+4\left(\frac{4}{15}\right) &= \\ -15\left[\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right)\right]+4\left(\frac{4}{15}\right) &= \\ -15\left(\frac{16}{225}\right)+\frac{16}{15} &= \\ -\frac{(15x16)}{15x15}+\frac{16}{15} &= \\ \frac{-16}{15}+\frac{16}{15} &= 0 \end{aligned}$$

c) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $10x^2 = 8x$?

Para contestar la pregunta expresemos la ecuación dada en la forma $ax^2+bx=0$

$10x^2=8x$	
$10x^2+(-8x)=8x+(-8x)$	Sumando a cada miembro el inverso aditivo de $8x$
$10x^2-8x=8x+(-8x)$	Definición de resta
$10x^2-8x=0$	Propiedad del inverso aditivo

La ecuación $10x^2-8x = 0$ tiene por soluciones a:

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = \frac{-(-8)}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$$

Comprobación:

Sustituyendo los valores: $x_1 = 0$ y $x_2 = .8$ en la ecuación original ($10x^2=8x$). tenemos:

Con $x_1 = 0$

$$10(0)^2 = 8(0)$$
$$10(0) = 0$$
$$0 = 0$$

Con $x_2 = .8$

$$10(0.8)^2 = 8(.8)$$
$$10(0.64) = 6.4$$
$$6.4 = 6.4$$

De lo cual, concluimos que $x_1 = 0$ y $x_2 = .8$ satisfacen a la ecuación $10x^2=8x$.

EJERCICIOS:

Para cada una de las ecuaciones dadas, comprueba las soluciones propuestas.

Ecuaciones

Ejemplo:

$2x^2-3 = 0$

Soluciones

$x_1 = 1.22$

$x_2 = -1.22$

Comprobación

Con $x_1 = 1.22$

$$2(1.22)^2-3 = 0$$
$$2(1.4884)-3 = 0$$
$$2.9768-3 = 0$$
$$0.0232 \doteq 0$$

Con $x_2 = -1.22$

$$2(-1.22)^2-3 =$$
$$2(1.4884)-3 =$$
$$0.0232 \doteq 0$$

$5x^2 = 20$

$x_1 = 2$
$x_2 = -2$

$2x^2 - 18 = 0$

$x_1 = 3$
$x_2 = -3$

$6x^2 - 384 = 0$

$x_1 = 8$
$x_2 = -8$

$8x^2 - 32x = 0$

$x_1 = 0$
$x_2 = 4$

$14x^2 + 70x = 0$

$x_1 = 0$
$x_2 = -5$

Hasta este momento hemos aprendido a resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.

El siguiente cuadro resume nuestros resultados.

ECUACION INCOMPLETA	SOLUCION	METODO EMPLEADO
$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$	Despeje de x
$ax^2+c = 0$	$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$	Despeje de x
$ax^2+bx = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = \frac{-b}{a}$	Factorización

Con lo que hemos estudiado, podemos preguntarnos si ya estamos en posibilidades de resolver el problema sobre los asistentes a la fiesta de Alejandra.

Quedamos en que el asunto se reducía a resolver la ecuación:

$\frac{n^2 - n}{2} = 66$ en la que n representaba el número de asistentes a la reunión.

Veamos:

$$\frac{n^2-n}{2} = 66$$

$2(\frac{n^2-n}{2}) = 2(66)$ Multiplicando cada miembro por 2

$n^2-n = 2(66)$ Propiedad del inverso multiplicativo

$n^2-n = 132$ Multiplicación

$n(n-1) = 132$ Sacando a n como factor común

$(n-1)n = 132$ Propiedad conmutativa de la multiplicación

Ahora fijemos nuestra atención en la ecuación:

$$(n-1)n = 132$$

Esta representa el producto de los números:

$(n-1)$ y n, el cual debe ser igual a 132

Antes de continuar, pensemos que:

1. n es un número natural (n = número de asistentes a la reunión)
2. (n-1) representa el antecesor de n (sí existe, porque $n \neq 0$)

Así:

Resolver la ecuación $(n-1)(n)=132$ significa encontrar un natural, n, que multiplicado por su antecesor, da por resultado 132.

Revisemos los factores de 132

$$\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad 132 = 2^2 \times 3 \times 11$$

Por lo tanto, los factores de 132 son:

1,2,3,4,6,11,12,22,33,44,66,132

De esta lista, se pueden localizar 3 parejas de factores

(2,3), (3,4) y (11,12)

en las que el primer elemento es antecesor del segundo elemento.

La pregunta, ahora, es:

¿Para cuál de estas parejas, el producto de sus elementos es 132?

La respuesta es: (11,12)

$$11 \times 12 = 132 \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times 11 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 132 \end{array}$$

Este resultado significa que el número de asistentes a la reunión fue de 12.

Comprobación:

Sustituyendo el valor n = 12 en la ecuación $\frac{n^2 - n}{2} = 66$ tenemos:

$$\frac{12^2 - 12}{2} = \frac{(12 \times 12) - 12}{2} = \frac{144 - 12}{2} = \frac{132}{2} = 66$$

Con lo que comprobamos que se satisface la ecuación.

En esta sección, estudiaremos una forma general para resolver ecuaciones como la anterior. Antes de iniciarla, escribamos la ecuacion $\frac{n^2-n}{2} = 66$ como $\frac{x^2-x}{2} = 66$

Así:

$$\frac{x^2 - x}{2} = 66$$

$$x^2 - x = 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

Puedes observar que esta última ecuación es una ecuación completa de segundo grado, en la cual:

$a = 1$
$b = -1$
$c = -132$

En esta sección estudiaremos un método para resolver ecuaciones de segundo grado en general.

FORMULA GENERAL PARA RESOLVER UNA ECUACION DE 2o.GRADO

En la unidad anterior, aprendiste a factorizar trinomios. Utilizaremos los conceptos estudiados para deducir la fórmula general, que nos servirá para encontrar las soluciones de cualquier ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$

Para iniciar, recordemos que:

$$x^2+2x+1 \quad , \quad 4x^2+16x+16 \quad , \quad x^2-10x+25$$

son trinomios cuadrados perfectos y pueden expresarse como cuadrados de un binomio.

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$
$$4x^2+16x+16=(2x+4)^2$$
$$x^2-10x+25=(x-5)^2$$

Con esto, podemos resolver ecuaciones en las que uno de los miembros sea un trinomio cuadrado perfecto y el otro sea un número real. Para ejemplificar, veamos los siguientes ejemplos en los que el primer miembro es uno de los trinomios anteriores.

a) Resolvamos la ecuación $x^2+2x+1=0$.

$$x^2+2x+1=0$$
$$(x+1)^2=0 \qquad (x+1)(x+1)=0$$

Por lo tanto:

$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Comprobación.

Sustituyendo el valor de $x=-1$ en la ecuación original, tenemos:

$$(-1)^2+2(-1)+1=1-2+1=0$$

Es decir:

<u>La ecuación $x^2+2x+1=0$ tiene solución en los reales que es:</u>

$$x=-1$$

b) Resolvamos la ecuación: $4x^2+16x+16=36$

$$4x^2+16x+16=36$$
$$(2x+4)^2=36$$
$$2x+4=\pm\sqrt{36}$$
$$2x+4=\pm 6$$
$$2x=-4\pm 6$$
$$x=\frac{-4\pm 6}{2}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Así:

$x_1 = 1$

$x_2 = -5$

Comprobación:

Con

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ 4x^2+16x+16 &= 36 \\ 4(1)^2+16(1)+16 &= 36 \\ 4(1)+16+16 &= 36 \\ 4+16+16 &= 36 \\ 36 &= 36 \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} x_2 &= -5 \\ 4x^2+16x+16 &= 36 \\ 4(-5)^2+16(-5)+16 &= 36 \\ 4(25)-80+16 &= 36 \\ 100-80+16 &= 36 \\ 36 &= 36 \end{aligned}$$

Podemos notar que los valores $x_1 = 1$ y $x_2 = -5$ satisfacen la ecuación $4x^2+16x+16 = 36$

Es decir:

<u>La ecuación $4x^2+16x+16 = 36$ tiene dos soluciones en los reales que son:</u>

<u>$x_1 = 1$ y $x_2 = -5$</u>

c) Por último, resolvamos la ecuación

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= -100 \\ (x-5)^2 &= -100 \\ x-5 &= \pm\sqrt{-100} \\ x &= +5 \pm\sqrt{-100} \end{aligned}$$

De acuerdo a lo establecido en páginas anteriores, sabemos que $\sqrt{-100}$ <u>no</u> es un número real ya que <u>no</u> existe real alguno cuyo cuadrado sea igual a -100

Con ésto, podemos concluir que:

<u>La ecuación $x^2 - 10x + 25 = -100$ <u>no</u> tiene solución en los reales.</u>

Resumiendo:

> Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c = 0$ cumple con una y sólo una de las siguientes condiciones:
>
> a) La ecuación tiene una solución en los reales
>
> b) La ecuación tiene dos soluciones en los reales
>
> c) La ecuación no tiene soluciones en los reales.

A continuación deducimos la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. La deducción se fundamenta en completar un trinomio cuadrado perfecto.

Supongamos que queremos resolver la ecuación:

$ax^2+bx+c = 0$	
$(ax^2+bx+c)+(-c) = 0+(-c)$	Sumando el inverso aditivo de c a cada miembro
$(ax^2+bx)+(c+(-c)) = 0+(-c)$	Propiedad asociativa de la adición
$(ax^2+bx)+0 = 0+(-c)$	Propiedad del inverso aditivo
$ax^2+bx = -c$	Propiedad del neutro aditivo
$a(x^2+\frac{b}{a}x) = -c$	Sacando como factor común a "a"
$\frac{1}{a}[a(x^2+\frac{b}{a}x)] = \frac{1}{a}(-c)$	Multiplicando cada miembro por el inverso multiplicativo de "a"
$[\frac{1}{a}(a)](x^2+\frac{b}{a}x) = \frac{1}{a}(-c)$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$1(x^2+\frac{b}{a}x) = \frac{1}{a}(-c)$	Propiedad del inverso multiplicativo
$x^2+\frac{b}{a}x = \frac{1}{a}(-c)$	Propiedad del neutro multiplicativo
$x^2+\frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$	Multiplicación en los reales
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$	Sumando $\frac{b^2}{4a^2}$ a cada miembro
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$	Suma de reales
$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$	Factorizando el binomio al cuadrado
$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	Definición de raíz cuadrada
$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Propiedad de la raíz cuadrada

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}} + \left(\frac{-b}{2a}\right)$$ Sumando a cada miembro el inverso aditivo de $\frac{b}{2a}$

$$x+\left[\frac{b}{2a} + \left(\frac{-b}{2a}\right)\right] = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}} + \left(\frac{-b}{2a}\right)$$ Propiedad asociativa de la adición

$$x+0 = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}} + \left(\frac{-b}{2a}\right)$$ Propiedad del inverso aditivo

$$x = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}} + \left(\frac{-b}{2a}\right)$$ Propiedad del neutro aditivo

$$x = \frac{-b}{2a} \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$ Propiedad conmutativa de la adición

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Suma de reales

Concluimos que:

La ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene por solución a:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Conviene observar lo siguiente:

1o. En la solución de la ecuación sólo aparecen los términos:
"a" que es el coeficiente del término cuadrático
"b" que es el coeficiente del término lineal
"c" que es el término independiente

2o. En la solución aparece el término: b^2-4ac al que llamaremos DISCRIMINANTE y del cual dependerá que la ecuación:

- tenga una solución real,
- tenga dos soluciones reales,
- no tenga solución real.

De acuerdo a:

- si el DISCRIMINANTE = 0,
- si el DISCRIMINANTE > 0
- si el DISCRIMINANTE < 0

En los siguientes ejemplos, se utiliza la fórmula general para resolver cada una de las ecuaciones dadas.

Ejemplo 1.

Solución de la ecuación: $x^2 - 8x - 84 = 0$

1o. Identificación de a, b y c.

$a = 1$ (coeficiente del término cuadrático)
$b = -8$ (coeficiente del término lineal)
$c = -84$ (término independiente)

2o. Escritura de la fórmula general

$$c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3o. Sustitución de los valores de a,b y c en la fórmula general:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-84)}}{2\ (1)}$$

4o. Realización de operaciones

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 336}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{400}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 20}{2}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{8+20}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

Así: $x_1 = 14$

$$x_2 = \frac{8-20}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$x_2 = -6$

5o. Comprobación

Verificando que los valores $x_1 = 14$ y $x_2 = -6$
satisfacen la ecuación $x^2 - 8x - 84 = 0$

Con $x_1 = 14$
$(14)^2-8(14)-84 = 0$
$196-112-84 = 0$
$196-196 = 0$

Con $x_2 = -6$
$(-6)^2-8(-6)-84 = 0$
$36+48-84 = 0$
$84-84 = 0$

Conclusión:

La ecuación $x^2 -8x-84=0$ tiene por soluciones a:

$x_1 = 14$ y $x_2 = -6$

En el paso (4) nota: que el DISCRIMINANTE b^2-4ac es igual a 400. Por lo que - la ecuación tuvo dos raíces reales: 14 y -6.

Ejemplo 2

Solución de la ecuación: $4x^2 -12x+9=0$

1o. Identificación de a,b y c

$$a = 4$$
$$b = -12$$
$$c = 9$$

2o. Escritura de la fórmula general

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 -4ac}}{2a}$$

3o. Sustitución de los valores de a,b y c en la fórmula general:

$$x = \frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\ (4)\ (9)}}{2\ (4)}$$

4o. Realización de operaciones:

$$x = \frac{12\pm\sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$x = \frac{12\pm\sqrt{0}}{8} = \frac{12+0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Así: $x = 1.5$

5o. Comprobación:

Verificando que el valor $x = 1.5$ satisface la ecuación

$$4x^2-12x+9= 0$$
$$4(1.5)^2-12(1.5)+9= 0$$
$$4(2.25)-18+9= 0$$
$$9-18+9= 0$$

Conclusión:

La ecuación $4x^2-12x+9=0$ tiene por solucion a: $x = 1.5$

En el paso (4) Nota: que el DISCRIMINANTE b^2-4ac es igual a cero. Por lo que la ecuación tuvo una raíz real: 1.5

Ejemplo 3.

Solución de la ecuación: $x^2+x+3 = 0$

1o. Identificación de a,b y c.

$$a = 1$$
$$b = 1$$
$$c = 3$$

2o. Escritura de la fórmula general

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3o. Sustitución de los valores de a,b y c en la fórmula general.

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(3)}}{2(1)}$$

4o. Realización de operaciones

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$$

Como $\sqrt{-11}$ no es un número real, x tampoco es real.

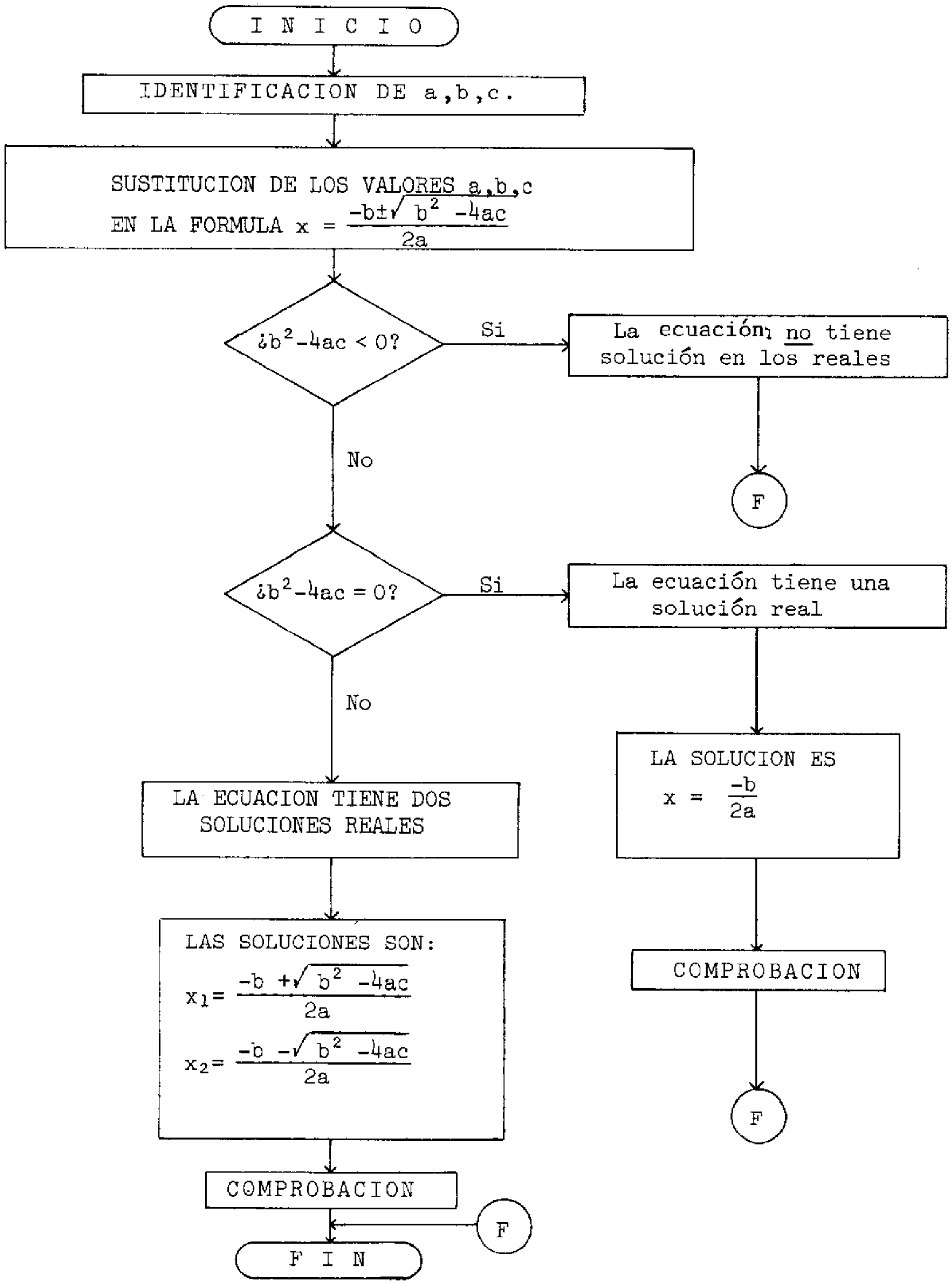
Conclusión:

La ecuación $x^2+x+3=0$ no tiene solución en los número reales.

Un diagrama de flujo para resolver una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, es el que se presenta en la siguiente hoja.

DIAGRAMA DE FLUJO PARA RESOLVER

ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2+bx+c=0$



EJERCICIOS:

a) Escribe el término que falta en cada expresión de tal manera que se obtenga un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:

$$x^2+2x+\boxed{1}=$$

$$y^2-4y+\boxed{}=$$

$$x^2+9z+\boxed{}=$$

$$m^2-3m+\boxed{\frac{9}{4}}=$$

$$x^2+18x+\boxed{}=$$

$$p^2+22p+\boxed{}=$$

$$x^2+14x+\boxed{49}=$$

$$x^2+7x+\boxed{}=$$

$$q^2-3p+\boxed{}=$$

b) Representa a cada uno de los trinomios cuadrados perfectos del inciso (a) como cuadrados de binomios

Ejemplos:

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

$$m^2-3m+\frac{9}{4} = (m-\frac{3}{2})^2$$

$$x^2+14x+49 = (x+7)^2$$

c) Utiliza la fórmula general para resolver las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x^2-7x+3 &= 0 \\ 2z^2 &= z+3 \\ 3y^2+8y+4 &= 0 \\ 6t^2 &= t-2 \\ 3r^2-2r &= 2 \\ 2v^2 &= v+1 \\ 2y^2-3y &= 9 \\ 4z^2-8z-1 &= 0 \\ 2x^2 &= 3x+20 \\ t^2-t &= 4 \end{aligned}$$

d) Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones por el método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo

$$\begin{aligned} x^2+2x-80 &= 0 \\ x^2+2x &= 80 \\ x^2+2x+1 &= 80+1 \\ (x+1)^2 &= 81 \\ x+1 &= \pm\sqrt{81} \\ x+1 &= \pm 9 \\ x &= -1 \pm 9 \end{aligned}$$

Comprobación

Con $x_1 = 8$

$$\begin{aligned} (8)^2+2(8)-80 &= \\ 64+16-80 &= \\ 80-80 &= 0 \end{aligned}$$

Con $x_2 = -10$

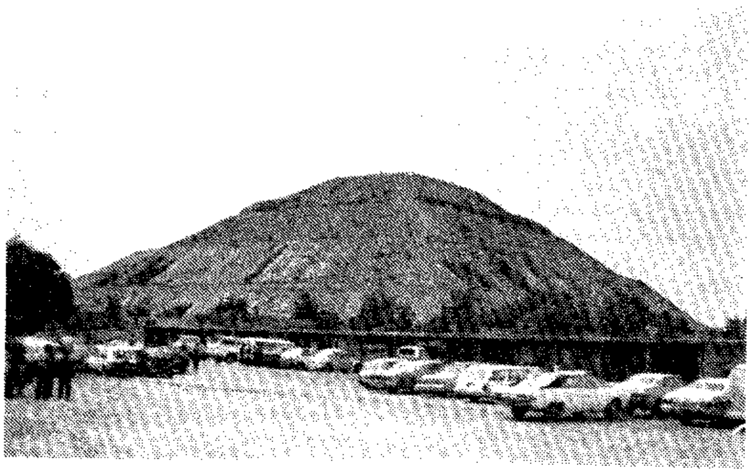
$$\begin{aligned} (-10)^2+2(-10) &= \\ 100-20-80 &= \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

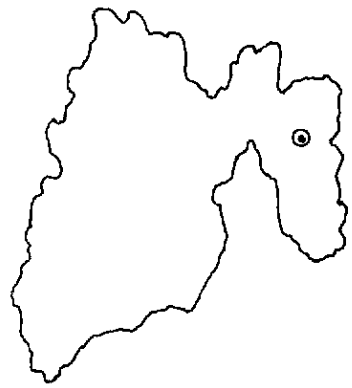
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1+9 = 8 \\ x_2 &= -1-9 = -10 \end{aligned}$$

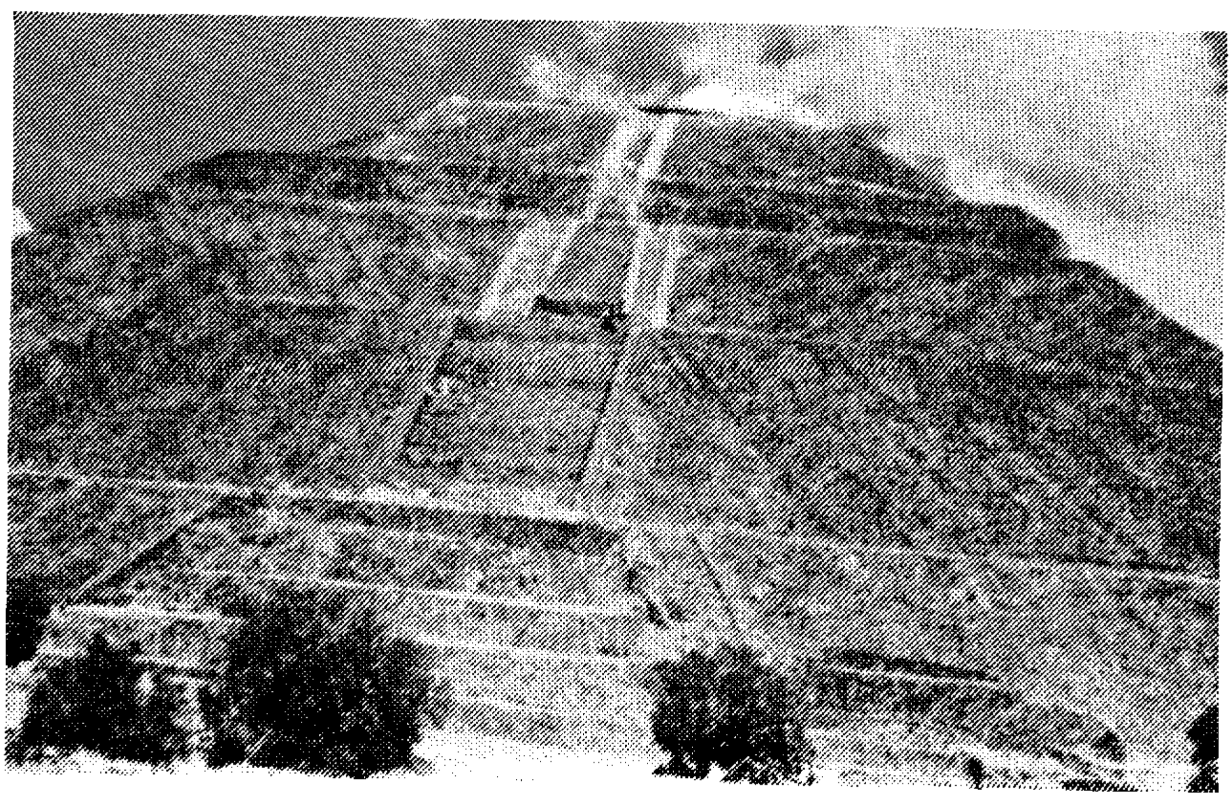
$$\begin{aligned} y^2-4y &= 0 \\ a^2+2a &= 5 \\ m^2+4m &= 8 \\ 3x^2-2x &= 1 \\ z^2+6z &= -8 \\ -x^2+4x &= 28 \\ q^2-8q &= -16 \\ m^2-4m+8 &= 6m \end{aligned}$$

Teotihuacan fue el asiento de una de las más avanzadas culturas que se desarrollaron dentro del área mesoamericana. En uno de su períodos de desarrollo -- (1 a 250 años Después de nuestra era), su principal actividad fue la construcción. Se edificaron, entonces diversos conjuntos de templos, entre los que destacan las pirámides de la luna y del sol.

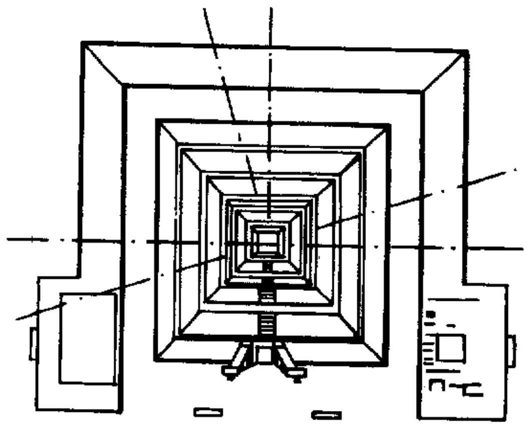




La pirámide del sol, es la de mayor volumen en Teotihuacan y la segunda en México, únicamente superada por la pirámide de Cholula.



La base de esta pirámide es cuadrada, así como -- sus diferentes niveles.



Las dimensiones aproximadas de sus niveles son:

Nivel	Medida del lado en metros
1	225
2	200
3	175
4	150
5	125
6	100

Al calcular el área de cada nivel ($A = l^2$, en la que l es la medida del lado), se tiene:

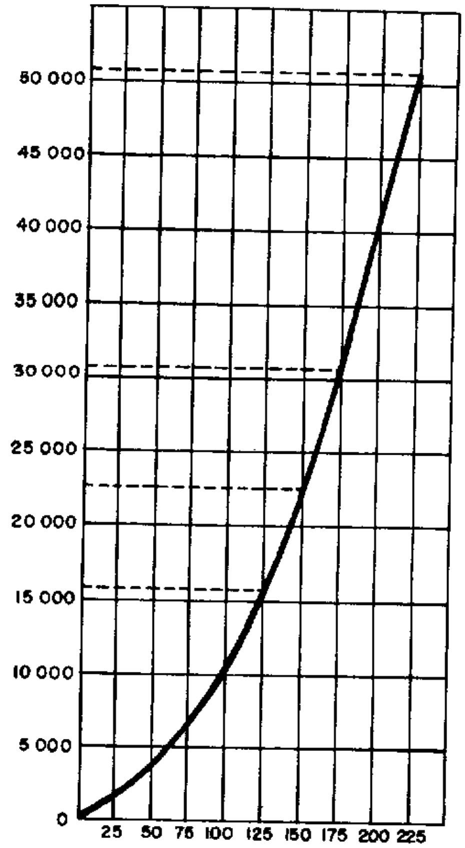
Nivel	Area en metros cuadrados
1	$225^2 = 50\ 625$
2	$200^2 = 40\ 000$
3	$175^2 = 30\ 625$
4	$150^2 = 22\ 500$
5	$125^2 = 15\ 625$
6	$100^2 = 10\ 000$

Al concentrar los datos de la medida de los lados, y el área del cuadrado correspondiente, tenemos:

Lado L	Area A
100	10 000
125	15 625
150	22 500
175	30 625
200	40 000
225	50 625

Observa que los datos están concentrados en forma ascendente.

Al elaborar la gráfica cartesiana obtenemos:



Puedes observar que la gráfica es un conjunto de puntos pertenecientes a una curva. Este tipo de curva recibe el nombre de parábola. Observa también que podemos decir que el área está en función de lado. Es decir:

$$A = f(x) = x^2 \qquad \text{(en este caso)}$$

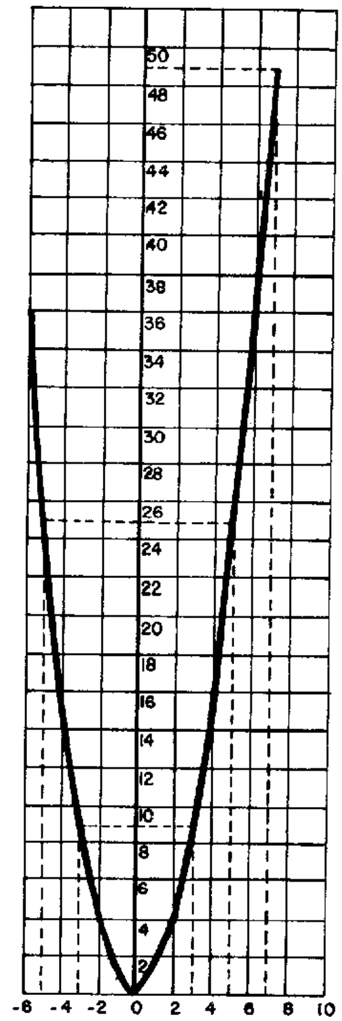
Si sustituimos en la igualdad anterior a A por "y", tenemos:

$$y = x^2 \qquad o \qquad f(x) = x^2$$

Ejemplos:

a) Platiquemos más acerca de la función $y = x^2$. Para hacerlo, asignemos valores a "x" y calculemos los valores de "y" correspondientes. Por último, tracemos la gráfica correspondiente:

x	y
-6	36
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
10	100



Podemos ver que:

La parábola intersecta al eje x en el punto (0,0). Es decir: $y = 0$, cuando $x = 0$

Otro ejemplo:

Grafiquemos la curva cuya ecuación es: $y = 2x^2-10$

1o. tabulando

x	$f(x)=2x^2-10$
-5	$2(-5)^2-10 = 2(25)-10 = 40$
-4	$2(-4)^2-10 = 2(16)-10 = 22$
-3	$2(-3)^2-10 = 2(9)-10 = 8$
-2	$2(-2)^2-10 = 2(4)-10 = -2$
-1	$2(-1)^2-10 = 2(1)-10 = -8$
0	$2(0)^2-10 = 2(0)-10 = -10$
1	$2(1)^2-10 = 2(1)-10 = -8$
2	$2(2)^2-10 = 2(4)-10 = -2$
3	$2(3)^2-10 = 2(9)-10 = 8$
4	$2(4)^2-10 = 2(16)-10 = 22$
5	$2(5)^2-10 = 2(25)-10 = 40$

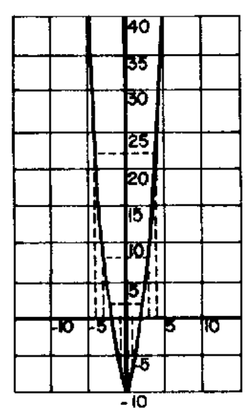
x	y
-5	40
-4	22
-3	8
-2	-2
-1	-8
0	-10
1	-8
2	-2
3	8
4	22
5	40

Observa que:

La parábola intersecta al eje de las x en dos puntos.

Es decir: $y = 0$ cuando

$x = 2.23$ o $x = -2.23$



EJERCICIO:

Resuelve la ecuación $2x^2-10 = 0$ utilizando cualquiera de los métodos conocidos.

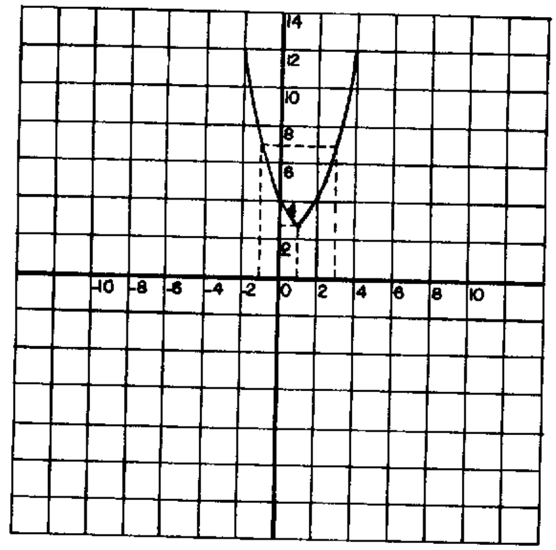
Otro ejemplo:

¿Cuál es la gráfica de la curva cuya ecuación es

$$y = x^2 - 2x + 4 \quad ?$$

1o. tabulando.

x	y	(x,y)
1	3	(1,3)
0	4	(0,4)
-1	7	(-1,7)
2	4	(2,4)
3	7	(3,7)
-2	12	(-2,12)
4	12	(4,12)



La gráfica de la parábola muestra que ésta no intersecta al eje de las x.

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + 4 = 0$? Es decir, ¿para qué valores de x, y = 0?

Para responder, resolvamos la ecuación:

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

Solución:

1o. Identificación de a,b y c

$$a = 1$$
$$b = -2$$
$$c = 4$$

2o. Escritura de la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3o. Sustituyendo los valores de a,b y c en la fórmula general

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4(1)(4)}}{2\ (1)}$$

4°. Realización de operaciones:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Observa el discriminante, (-12), éste es menor que cero, por lo que la ecuación $x^2-2x+4 = 0$ no tiene solución en los reales.

Definición:

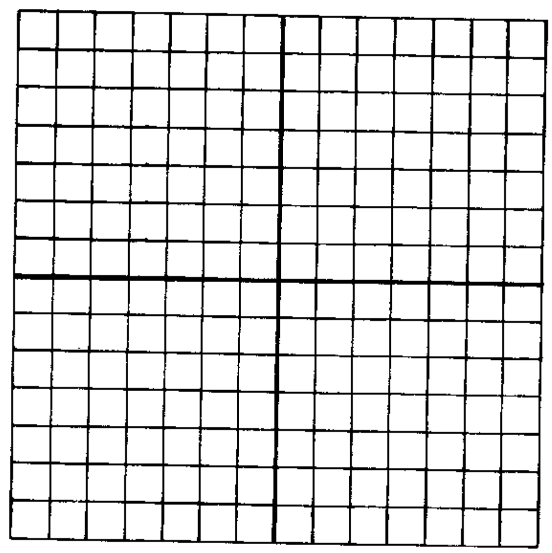
> Si a,b y c son números reales $a \neq 0$.
> Una función de la forma $y = ax^2+bx + c$ recibe el nombre de función cuadrática en una variable y su gráfica es una curva llamada PARABOLA.

EJERCICIOS:

1) Grafica las siguientes funciones. Auxíliate completando la tabla correspondiente.

a) $y = x^2 - x - 2$

x	y	(x,y)
3	4	(3,4)
2	0	(2,0)
1	-2	(1,-2)
0	-2	(0,-2)
-1	0	(-1,0)
-2	4	(-2,4)



Preguntas:

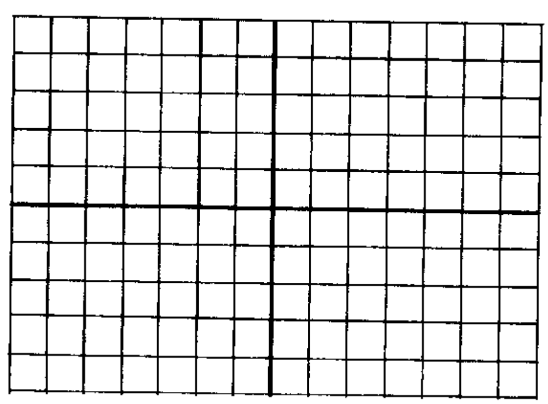
¿La parábola corta al eje x? ______________________________

Si tu respuesta es afirmativa indica en qué punto:

____

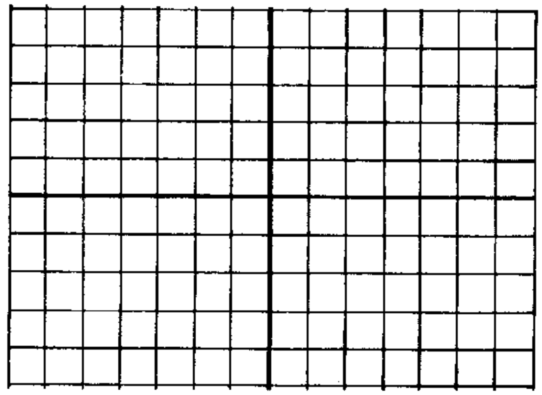
b) $y = x^2 - 2x$

x	y	(x,y)
0		
1		
-1		
2		
3		
4		



c) $y = x^2+6x+9$

x	y	(x,y)
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

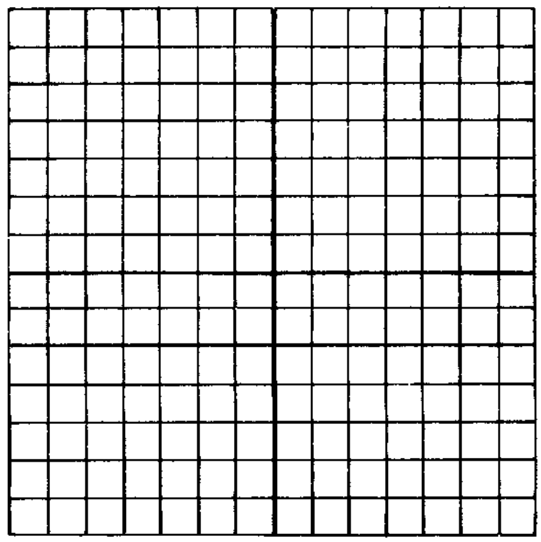


¿En qué puntos se intersectan la parábola y el eje x ?

____

d) $y = x^2+2x + 3$

x	y	(x,y)
-1		
-2		
-3		
-4		
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		



¿En qué puntos se intersectan el eje x y la parábola?

Podemos resumir lo estudiado, utilizando el siguiente esquema:

	La gráfica de una parábola cuya ecuación es: $y = ax^2+bx+c$	La solución o soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ **son:**
I	Intersecta al eje de las x en dos puntos.	Reales y distintas
II	Intersecta al eje de las x en un punto	Reales e iguales
III	No intersecta al eje de las x	Imaginarias (es decir, no son reales).

EJERCICIO:

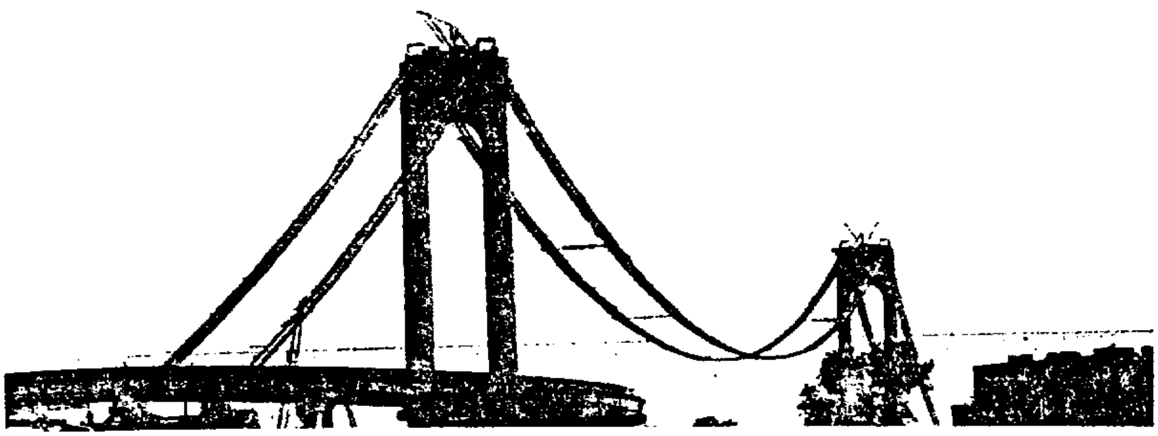
a) Grafica cada una de las siguientes funciones.

$y = -x^2$
$y = x^2+3x$
$y = x^2-5x$
$y = 2x^2+8x+8$
$y = x^2-5$
$y = 2x^2+2$
$y = -x^2+6$
$y = x^2-2x+1$

b) Resuelve las ecuaciones:

$-x^2 = 0$
$x^2+3x = 0$
$x^2-5x = 0$
$2x^2+8x+8 = 0$
$x^2-5 = 0$
$2x^2+2 = 0$
$-x^2+6 = 0$
$x^2 -2x+1 = 0$

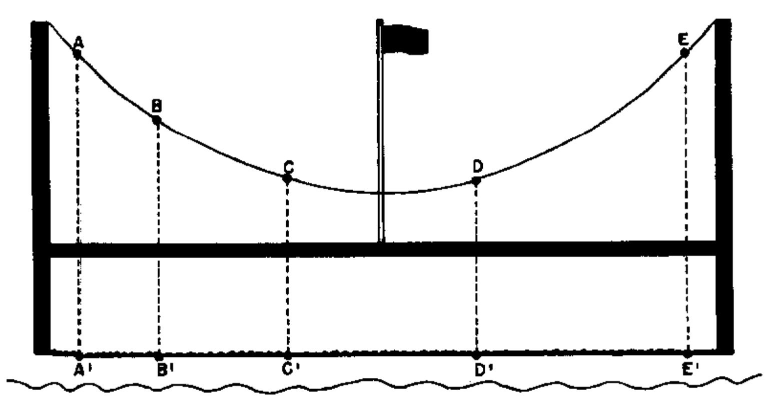
LA PARABOLA Y EL MUNDO FISICO



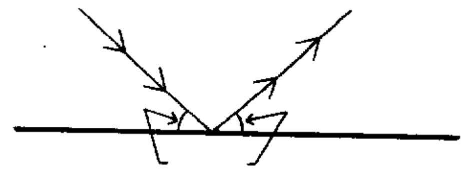
La fotografía de arriba muestra el puente en la Bahía de Nueva York.

El cable de soporte en el puente asemeja parte de una parábola.

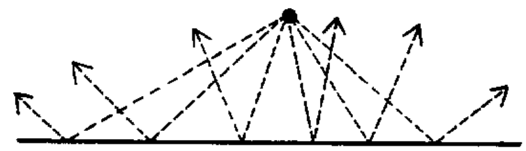
El diagrama de abajo muestra el cable de un puente que tiene una forma muy parecida a una parábola.



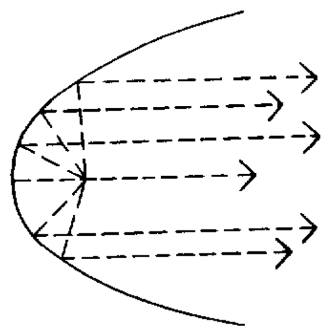
b) Un rayo de luz que llega a una superficie reflectora plana se refleja de tal manera que los rayos de incidencia y de reflexión son iguales.



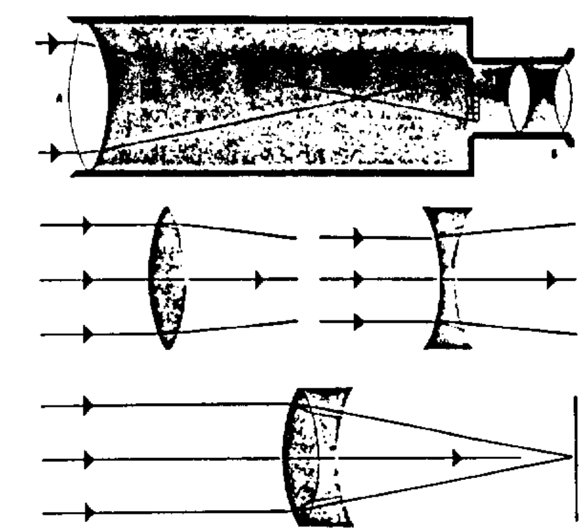
Los rayos de luz dirigidos hacia un espejo ordinario se reflejan en todas direcciones.



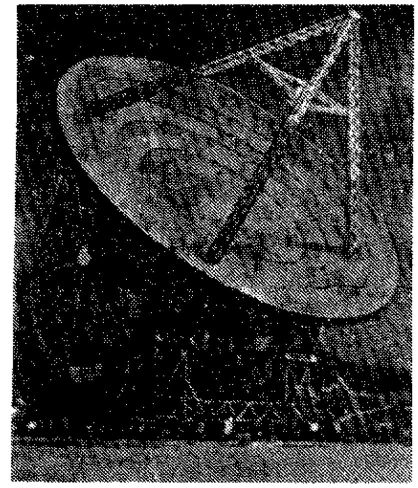
Los rayos de luz que salen de una fuente luminosa colocada en el foco de una parábola, se reflejan en línea recta.



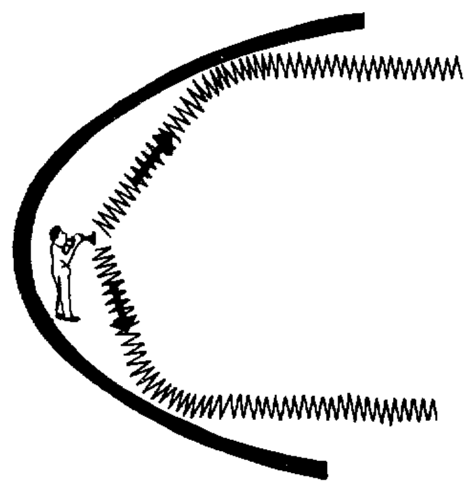
El corazón del telescopio Hale en el Monte Palomar es un espejo parabólico de 5 metros de diámetro.



c) Una aplicación de los espejos parabólicos está en la concentración de energía solar para uso en los hornos solares.



d) Algunas conchas acústicas se fabrican en forma de parábola con objeto de que las ondas de sonido se reflejen en línea recta.

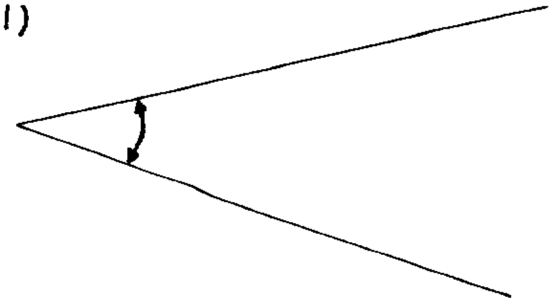


Actividad:

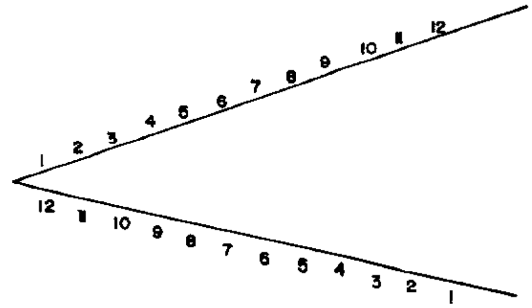
Al realizar las siguientes instrucciones, terminarás con el trazo de una parábola a través del trazo de segmentos de recta.

1o. Traza dos segmentos de recta de tal manera que se forme un ángulo agudo.

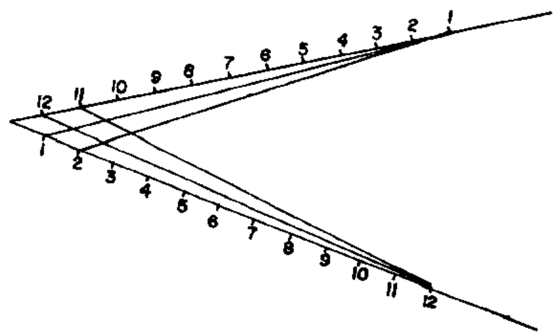
1)



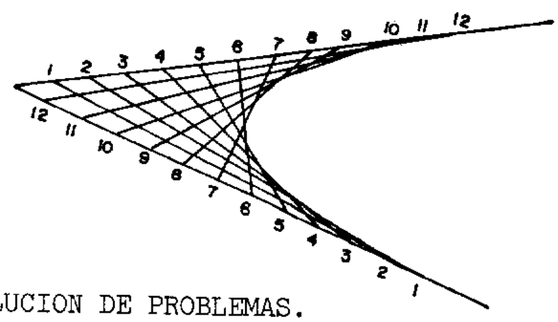
2o. Divide a cada segmento en doce(12) partes iguales. Enuméralas como en la figura:



3o. Une los puntos 1 con 1,2 con 2,3 con 3,... hasta 12, utilizando segmentos de recta.



La curva obtenida es una parábola.



APLICACION DE LA SOLUCION DE PROBLEMAS.

En la introducción de esta unidad, se desarrolló el problema sobre "Una reunión de amigos", el cual consistía en encontrar la solución de la ecuación:

$$\frac{x^2-x}{2} = 66$$

o bien, de la ecuación equivalente a ésta:

$$x^2-x = 132$$
$$(x^2-x-132 = 0)$$

En este momento, ya podemos resolver utilizando -- cualquiera de los métodos apropiados, desarrollados en las secciones precedentes.

Para hacerlo, utilizaremos la fórmula general:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En la que: $a = 1,\ b = -1,\ c = -132$

Así, sustituyendo los valores de a,b y c en la fórmula general:

$$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-132)}}{2\ (1)}$$

$$= \frac{1\pm\sqrt{1+528}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{529}}{2} = \frac{1\pm 23}{2}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{1+23}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{1-23}{2} = \frac{-22}{2} = -11$$

$$x_1 = 12, \qquad x_2 = -11$$

Tenemos dos soluciones a nuestro problema:

1) Una positiva, que es 12 y
2) Otra negativa, que es -11

Como $\underline{x}$ en nuestro problema original representa el número de asistentes en la reunión, $\underline{x}$ deberá ser un número entero positivo - no tendría sentido hablar de -11 personas como asistentes.

Así:

La solución a nuestro problemas es:

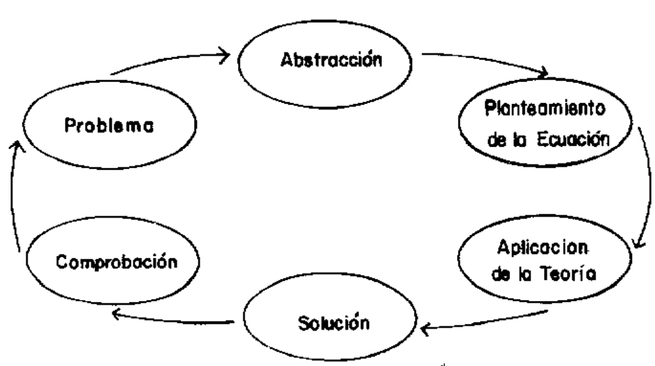
$$x = 12 \text{ personas}$$

Resultado que ya comprobamos.

Con frecuencia, tendremos que resolver problemas como éste, para resolverlos, tendremos que:

a) Entender el problema
b) Escribir la ecuación cuadrática correspondiente
c) Resolver la ecuación cuadrática
d) Comprobar el resultado.

El siguiente esquema puede ayudarnos a comprender estas ideas:



PROBLEMAS:

Resuelve cada uno de los siguientes problemas. Inicia planteando la ecuación correspondiente. Después, resuélvela por cualquiera de los métodos aprendidos en esta unidad y termina, comprobando tus resultados:

1. La altura de un rectángulo mide 5 metros más que la base. Si se sabe que el área de ese rectángulo es igual a 100 metros cuadrados, calcula las dimensiones de sus lados.

2. Se desea cubrir un piso circular con tapete y se sabe que el área del piso es de 310 metros cuadrados. ¿Cuál deberá ser el radio del círculo formado por el tapete?.

3. Si el producto de dos números consecutivos es igual a 342. ¿Cuáles son esos números?.

4. Si se compran boletos para el teatro con un costo de $22,500.00 y el número de los boletos resulta igual al precio por boleto.

   ¿Cuántos boletos se compraron?

unidad 4

triángulos y cuadriláteros

QUE TODO NUESTRO CONOCIMIENTO EMPIEZA - CON LA EXPERIENCIA, ES EFECTIVAMENTE COSA SOBRE LA CUAL NO HAY DÚDA ... PERO AUNQUE NUESTRO CONOCIMIENTO EMPIEZA CON LA EXPERIENCIA, NO NACE TODO ÉL DE LA EXPERIENCIA.

EMMANUEL KANT .

I N T R O D U C C I O N

La humanidad, a través de su evolución, ha desarrollado los conceptos y esto - seguramente - ha sido a partir de elementos que el mundo físico le ha sugerido. Por ejemplo: el concepto de punto habrá nacido, tal vez, a partir de la marca que un lápiz deja sobre el papel (o algo semejante); el segmento de recta habrá sido originado cuando alguien observó una cuerda estirada; quizá, la imagen obtenida - al observar el sol haya sido la semilla del concepto de círculo; de manera similar, por observación, el vuelo de algún insecto condujo al concepto de línea quebrada; - las celdillas de un panal pudieron ser el principio de la formación del concepto de exágono, etc.

Posteriormente, el estudio de estos conceptos ha tomado derroteros especiales: - el análisis de las características de los conceptos. Para ello, se ha auxiliado de clasificaciones y, éstas, han conducido a nuevos conceptos. Así se ha llegado a los de polígono, triángulo, pentágono, ángulo, bisectriz, etc. El interés ha conducido, también, a la determinación de las relaciones existentes entre los conceptos y los elementos producidos en su aplicación; esto ha hecho que en geometría se conozca la congruencia y la semejanza de figuras.

En todo este proceso, ha jugado un papel muy importante la lógica; ya que, a través de ésta, la geometría ha podido constituirse en un sistema deductivo.

En esta unidad, presentamos entre otros, los siguientes contenidos:

- Los polígonos y su clasificación.

- La relación de congruencia entre triángulos.

- Algunas propiedades de los triángulos y de los paralelogramos.

- Aplicaciones de las propiedades estudiadas.

OBJETIVOS PARTICULARES:

* Clasificará los polígonos.
* Analizará los casos de congruencia de triángulos.
* Inferirá las principales propiedades de los triángulos y los paralelográmos.
* Aplicará en problemas concretos, las propiedades estudiadas.

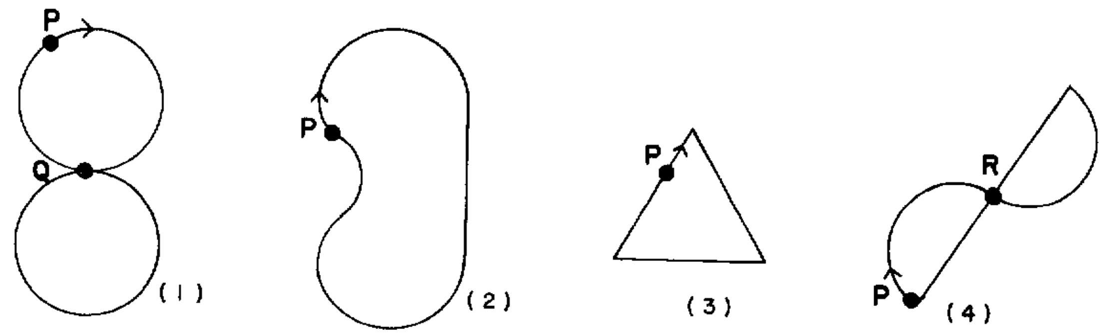
OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Clasificará los polígonos por su número de lados y por la medida de sus ángulos.
- Clasificará los triángulos según sus lados.
- Clasificará los triángulos según sus ángulos.
- Clasificará los cuadriláteros en relación con el paralelismo de sus lados.
- Postulará los tres casos de congruencia de triángulos.
- Distinguirá congruencia directa e inversa de triángulos.
- Comprobará los postulados de congruencia de triángulos, mediante rotaciones, traslaciones y simetrías.
- Inferirá que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a -- 180°
- Inferirá los corolarios de la propiedad 1.
- Inferirá la propiedad relativa a los ángulos opuestos a lados iguales del -- triángulo isósceles.
- Inferirá la relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.
- Inferirá las relaciones entre los lados de un triángulo.
- Aplicará el concepto de diagonal de un polígono.
- Inferirá las principales propiedades de los paralelogramos.
- Inferirá corolarios de las propiedades sobre paralelogramos.
- Aplicará el teorema de Pitágoras en problemas prácticos.
- Aplicará en ejercicios, las propiedades y corolarios sobre paralelogramos.

CURVAS O FIGURAS

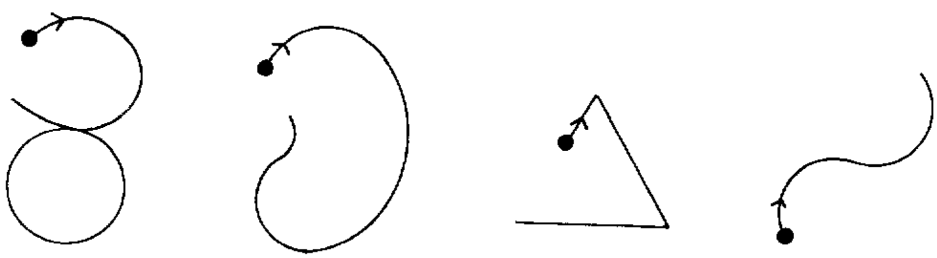
Iniciemos esta unidad recordando algunos conceptos estudiados en tu primer curso de Matemáticas. Para ello, observa las siguientes curvas:

A)



Son curvas que se han trazado a partir de un punto "P" del plano, siguiendo una trayectoria sin levantar el lápiz del papel y regresando al punto inicial.

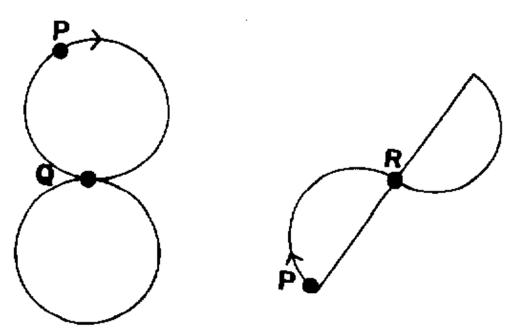
B) Ahora, observa estas curvas:



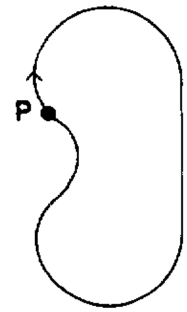
También pueden trazarse a partir de un punto inicial y siguiendo una trayectoria sin levantar el lápiz del papel; pero, como puedes observar, no se regresa al punto inicial.

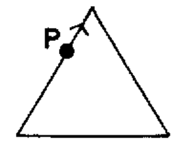
Las curvas del inciso A son ejemplos de curvas cerradas, las del inciso B son ejemplos de curvas no cerradas.

Centremos nuestra atención en las curvas del inciso A. De éstas, se puede observar que las correspondientes a (1) y (4), tienen dos puntos por los que se pasa dos veces: P y Q en la curva (1) y P y R en la curva (4).



Esto no sucede con las curvas (2) y (3), sólo hay un punto por el que se pasa dos veces y éste es el punto inicial "P".

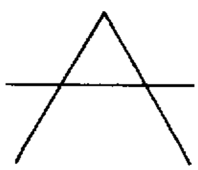




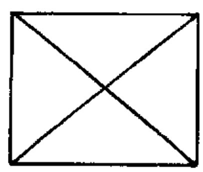
Definición:	Una curva cerrada es simple, si al trazarla, el único punto por el que se pasa dos veces es el punto inicial.

EJERCICIO:

Para cada una de las siguientes curvas escribe en el paréntesis correspondiente una S si es una curva cerrada simple, y una N si no lo es.



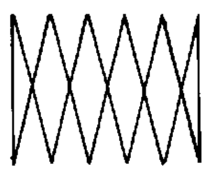
( )



( )

( )

( )

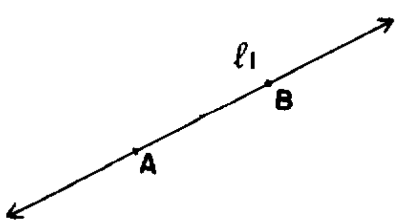


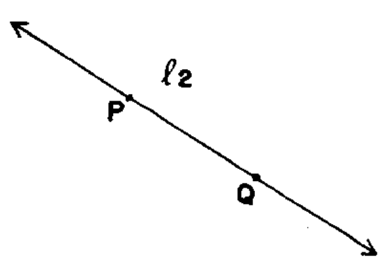
( )

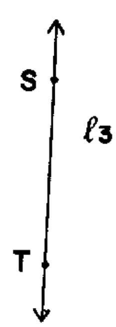
LINEAS QUEBRADAS

Sabemos que dos puntos del plano determinan una, y sólo una, línea recta.

Ejemplos:





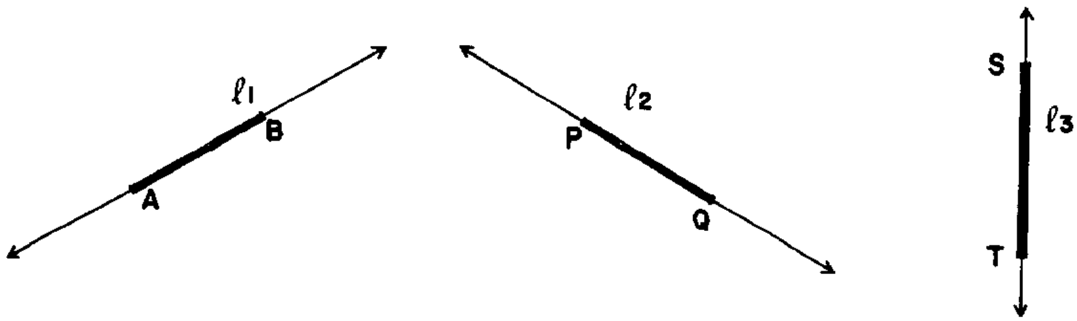


Los puntos A y B determinan la recta ℓ_1

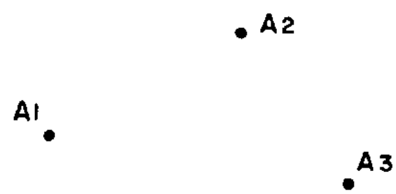
Los puntos P y Q determinan la recta ℓ_2

Los puntos S y T determinan la recta ℓ_3

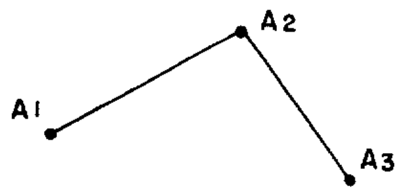
En cada una de las rectas anteriores las parejas de puntos determinan un segmento único.



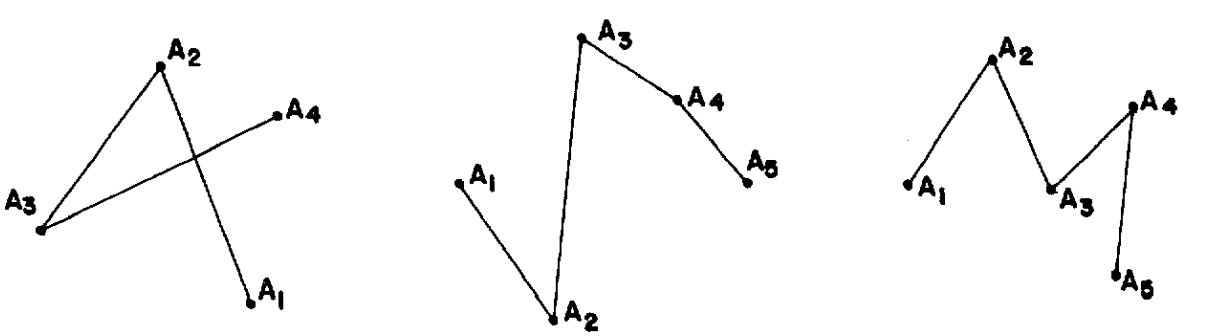
Consideremos ahora tres puntos A_1, A_2, A_3 del plano, que no sean colineales.



Y formemos los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_2A_3}$

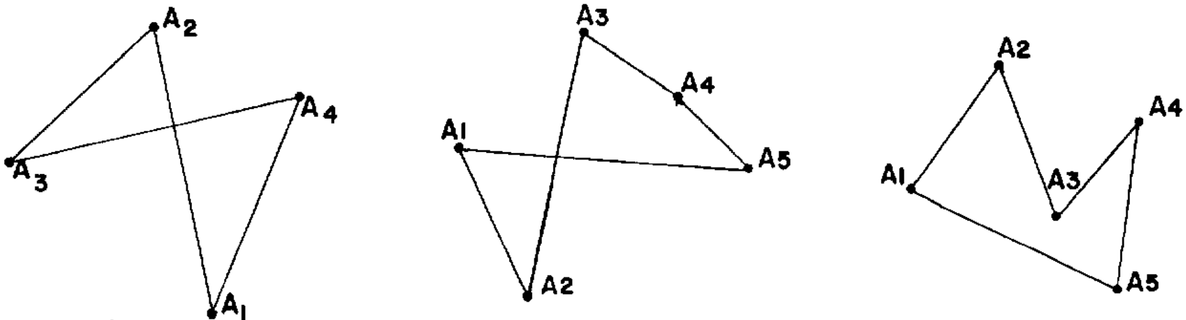


Esta curva es un ejemplo de línea quebrada. Otros ejemplos de líneas quebradas son:



La sucesión de puntos A_1, A_2, A_3,...,A_n determina en cada curva segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$,...,$\overline{A_{n-1}A_n}$.

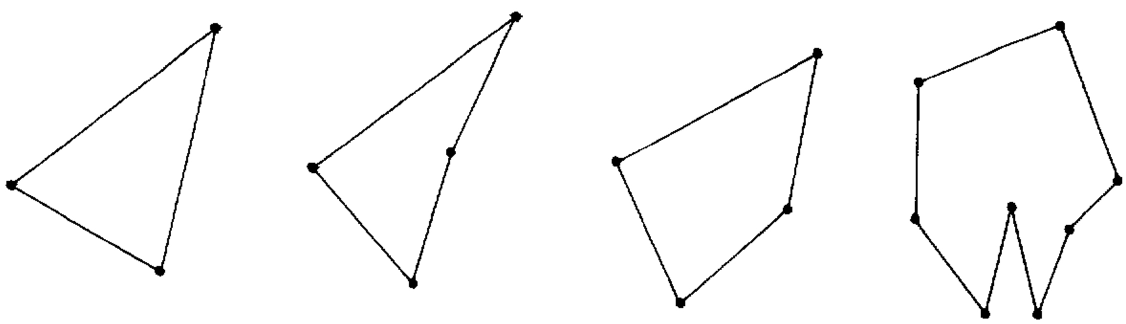
En cada una de estas líneas quebradas, podemos considerar el segmento determinado por el punto A_n (último punto de la sucesión) y el punto A_1 (primer elemento de la sucesión), obteniendo curvas como las siguientes.



(1) (2) (3)

Puedes ver que las curvas (1) y (2) son cerradas pero no simples y la curva (3) es cerrada simple. Esta última es un ejemplo de las llamadas polígonos.

Otros ejemplos de polígonos son:



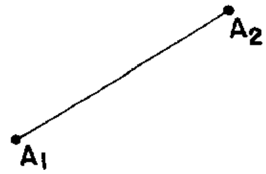
Definición: Un polígono es una línea quebrada cerrada simple.

De hecho:

Un polígono es un conjunto de puntos en el plano determinado por segmentos de recta cuyos extremos son puntos en sucesión: A_1, A_2, A_3,..., A_n con las siguientes características.

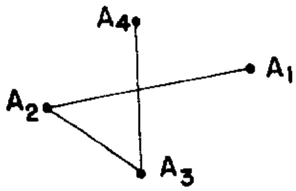
1.- Al menos hay 3 puntos en la sucesión
2.- Tres puntos consecutivos de la sucesión no son colineales
3.- Cada par de segmentos determinados, o no se intersectan o se intersectan en un punto de la sucesión.
4.- Cada punto de la sucesión es extremo de, solamente, 2 segmentos.

Observa:

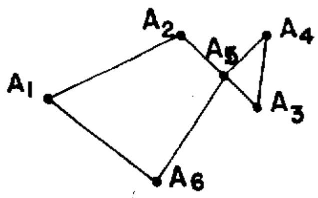


A_1 y A_2 no determinan un polígono. No se cumple la condición 1,

Los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_3A_4}$ se intersectan en un punto que no es de la sucesión A_1, A_2, A_3, A_4. No se cumple la tercera condición.

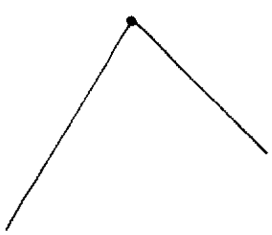


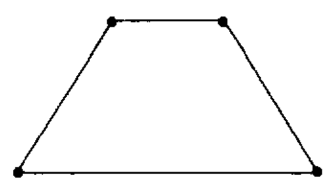
El punto A_5 es extremo de 4 segmentos($\overline{A_2A_5}$, $\overline{A_5A_4}$, $\overline{A_5A_3}$, $\overline{A_5A_6}$). No se cumple la cuarta condición.

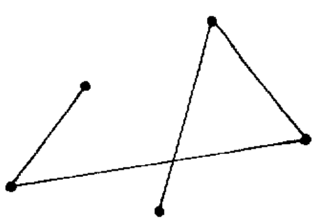


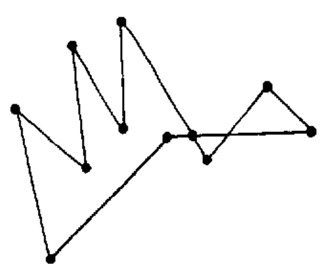
EJERCICIOS:

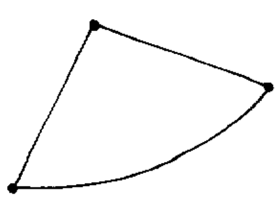
a) Para cada una de las siguientes curvas escribe en el paréntesis correspondiente una P, si es un polígono; o una N, si no lo es.

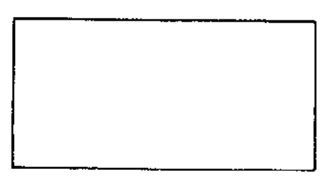
 ( )

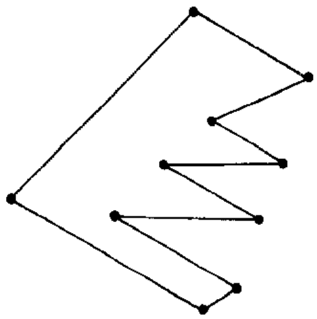
 ( )

 ( )

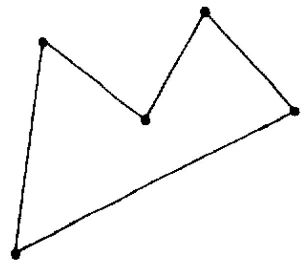
 ( )

 ( )

 ( )



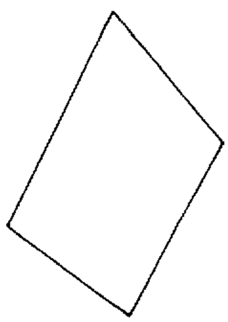
( )



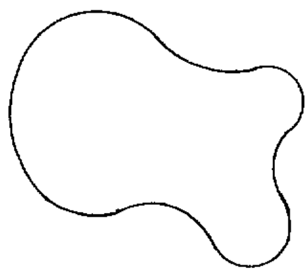
( )

b) A continuación se te presentan varias figuras geométricas. Indica cuáles de ellas son polígonos. En caso de que no se trate de un polígono expón las razones de ello.

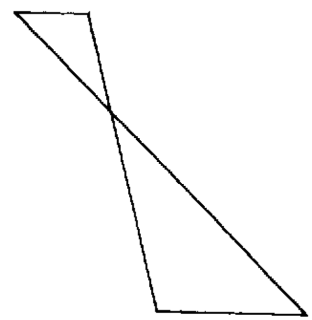
Observa los ejemplos:



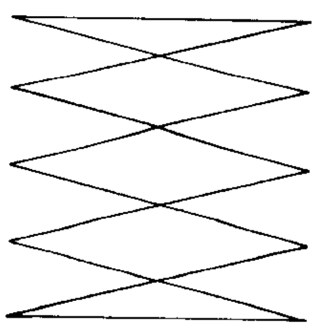
Sí es un polígono



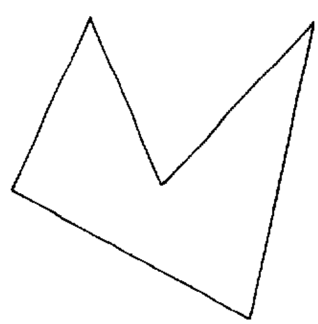
No es un polígono puesto que no está formada por segmentos.



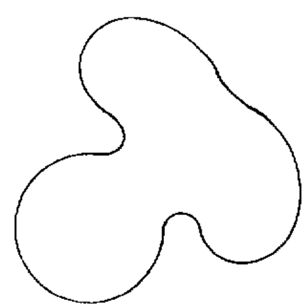
____



____

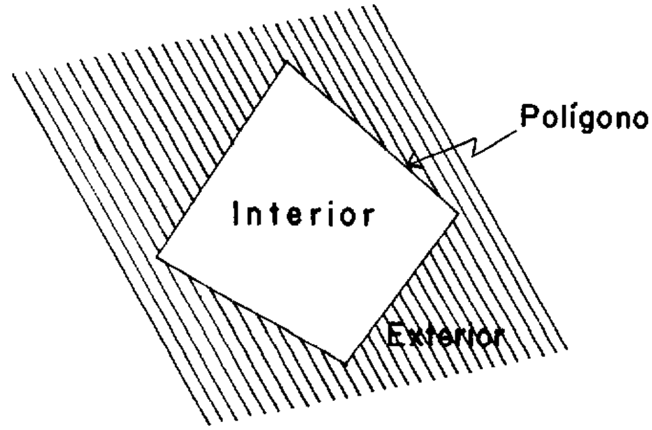


____

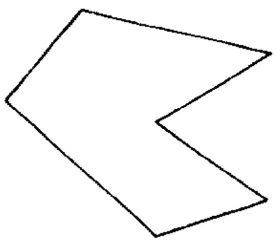


____

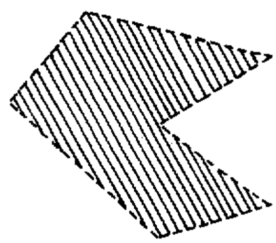
Como cualquier curva cerrada simple un polígono separa al plano en tres -- subconjuntos ajenos, que son: el inte-- rior del polígono, el exterior del polí gono y el polígono mismo.



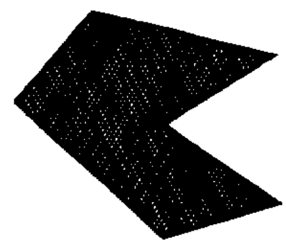
La unión de cualquier polígono y su interior se llama REGION POLIGONAL.



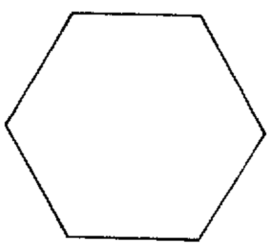
POLIGONO



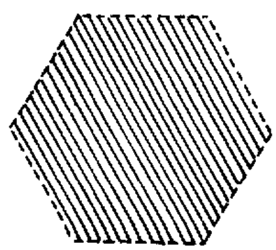
INTERIOR DEL POLIGONO



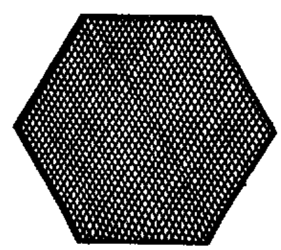
REGION POLIGONAL



POLIGONO



INTERIOR DEL POLIGONO

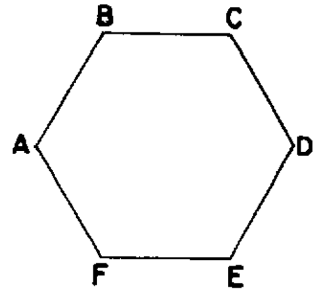


REGION POLIGONAL

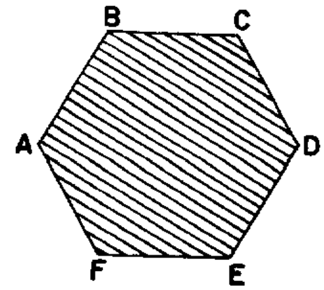
Es muy común utilizar la palabra polígono para referirnos, indistintamente, a la región poligonal o - exclusivamente - a la línea quebrada cerrada simple.

Por ejemplo:

El polígono ABCDEF es un hexágono, en este caso estamos utilizando la palabra polígono para referirnos exclusivamente a la figura formada por los segmentos de recta.



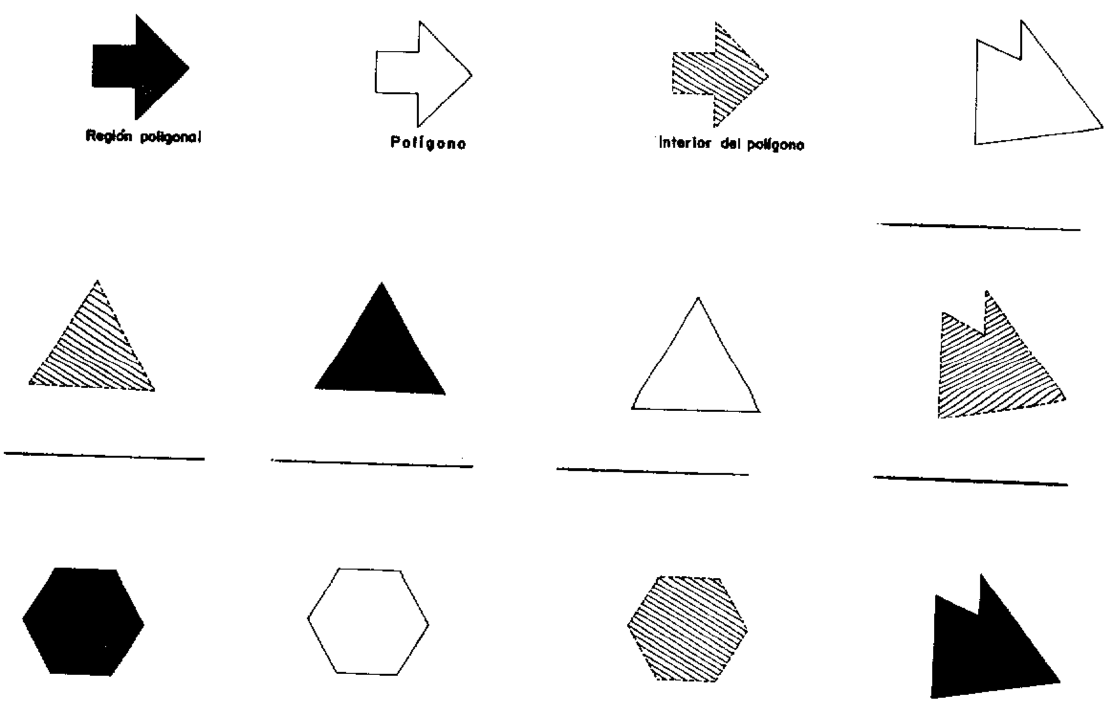
El polígono ABCDEF tiene una área de 10 cm^2, en este caso estamos utilizando la palabra polígono para referirnos a la región poligonal.



EJERCICIO:

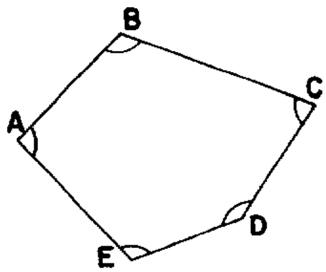
Para cada uno de los siguientes conjuntos de puntos escribe sobre la línea si corresponde a un polígono, al interior de un polígono o a una región poligonal.

Ejemplo:



ELEMENTOS DE UN POLIGONO

Observa el siguiente polígono:



Los puntos A, B, C, D y E reciben el nombre de vértices del polígono A B C D E.

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ reciben el nombre de lados del polígono.

Los ángulos: $\sphericalangle$ A, $\sphericalangle$ B, $\sphericalangle$ C, $\sphericalangle$ D, y $\sphericalangle$ E son ángulos internos del polígono.

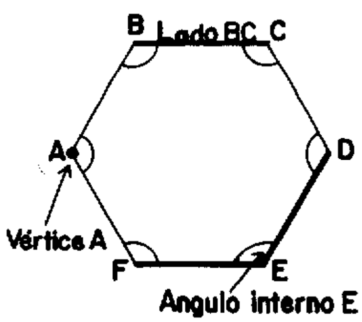
A y B son vértices consecutivos del polígono.
A y C son vértices no consecutivos del polígono.

En general:

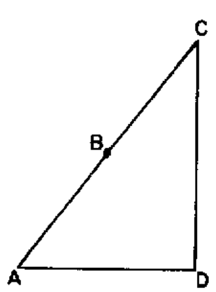
Dado un polígono determinado por los puntos A_1, A_2, A_3, ... A_n.

1) Los puntos A_1, A_2, A_3, ... A_n reciben el nombre de vértices.
2) Los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ... $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ reciben el nombre de lados.
3) Tres vértices consecutivos determinan un ángulo interno del polígono.

Ejemplos:

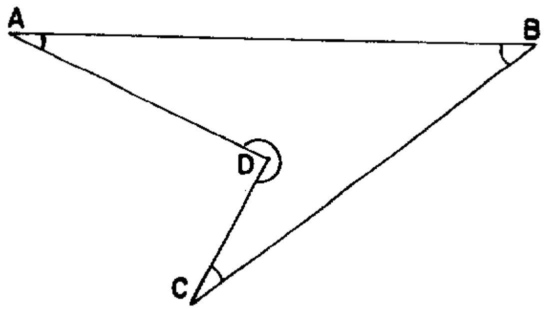


		Total
Los vértices son:	A, B, C, D, E y F.	6
Los lados son:	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, y $\overline{FA}$.	6
Los ángulos son:	$\sphericalangle$A, $\sphericalangle$B, $\sphericalangle$C, $\sphericalangle$D, $\sphericalangle$E y $\sphericalangle$F.	6



		Total
Los vértices son:	A, C y D	3
B no es vértice, pues no es extremo de algún segmento del polígono.		
Los lados son:	$\overline{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$	3
Los ángulos son:	$\sphericalangle$ A, $\sphericalangle$ C y $\sphericalangle$ D.	3

Total

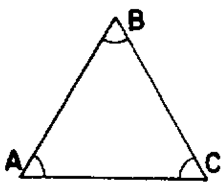


Los vértices son: A, B, C y D. 4
Los lados son: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ 4
Los ángulos son: ∢A, ∢B, ∢C y ∢D 4

Puedes observar en los ejemplos anteriores, que para cada polígono el número de vértices, lados y ángulos es el mismo: 6 en el primero, 3 en el segundo y 4 en el tercero.

EJERCICIO:

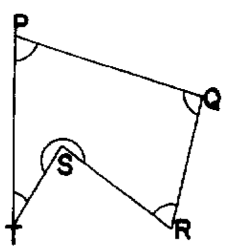
Determina los vértices, lados y ángulos de los siguientes polígonos:



Vértices: ______________________________

Lados: ______________________________

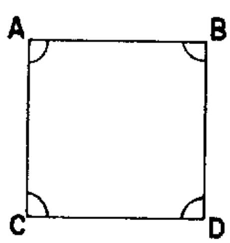
Angulos: ______________________________



Vértices: ______________________________

Lados: ______________________________

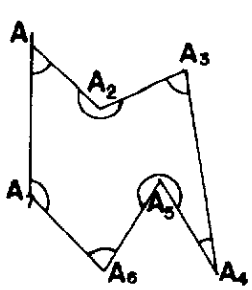
Angulos: ______________________________



Vértices: ______________________________

Lados: ______________________________

Angulos: ______________________________



Vértices: ______________________________

Lados: ______________________________

Angulos: ______________________________

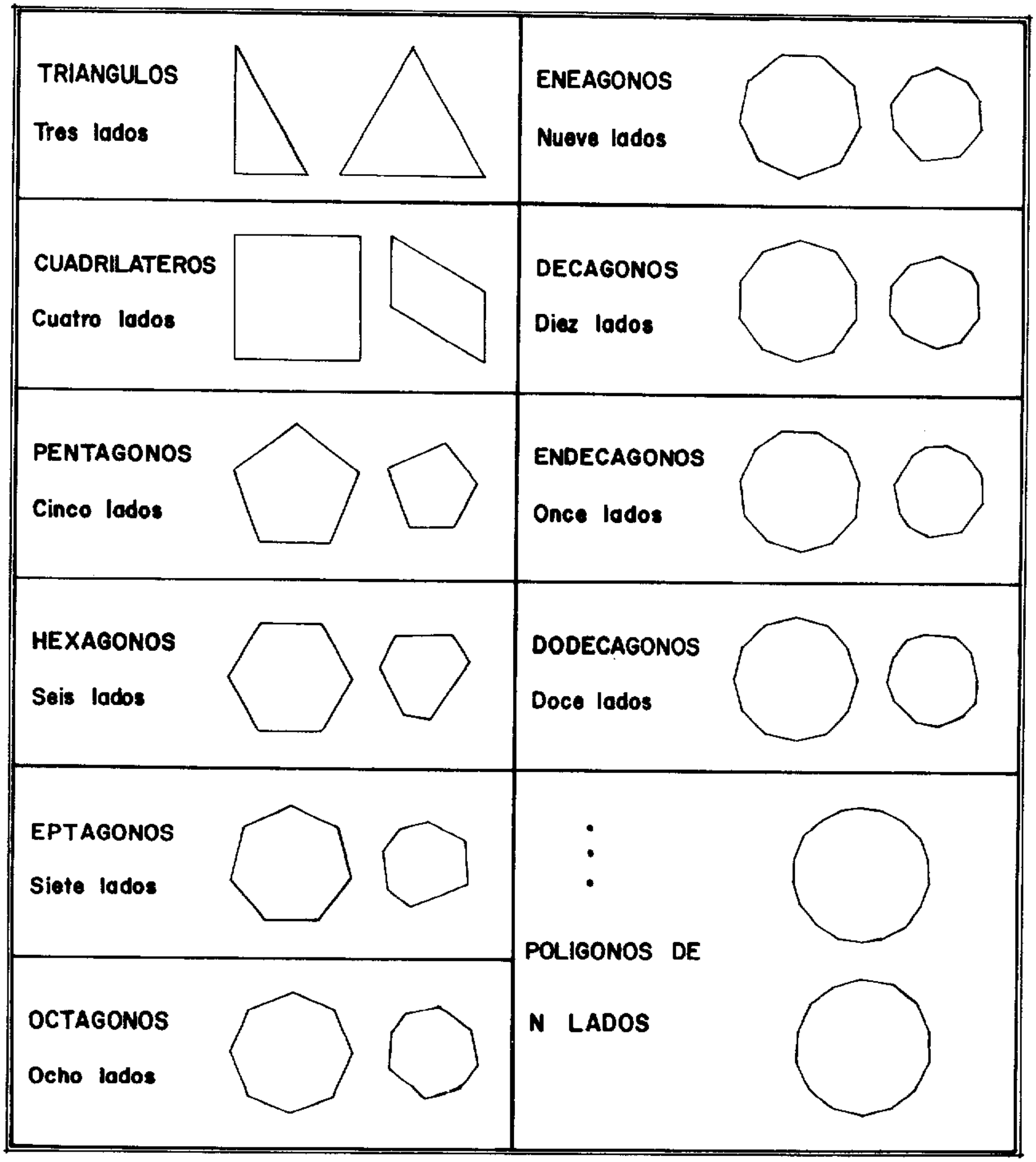
CLASIFICACION DE POLIGONOS

Para muchos propósitos es conveniente clasificar los polígonos, esto lo podemos hacer de dos maneras diferentes; por el número de sus lados y por su forma.

a) Por el número de sus lados.

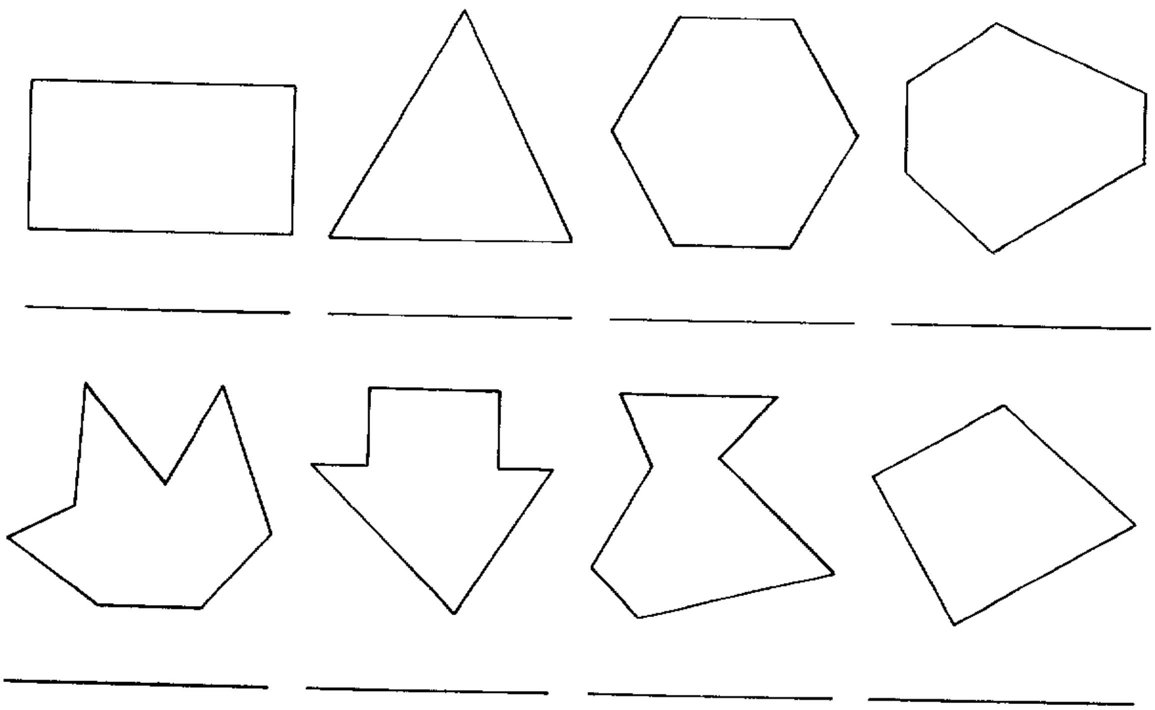
Por lo visto anteriormente, podemos decir que un polígono puede tener: 3, 4, 5, 6,... n lados.

La tabla siguiente resume la clasificación de polígonos según su número de lados.



EJERCICIO:

Anota el nombre que corresponde a cada polígono atendiendo al número de lados que lo forman.



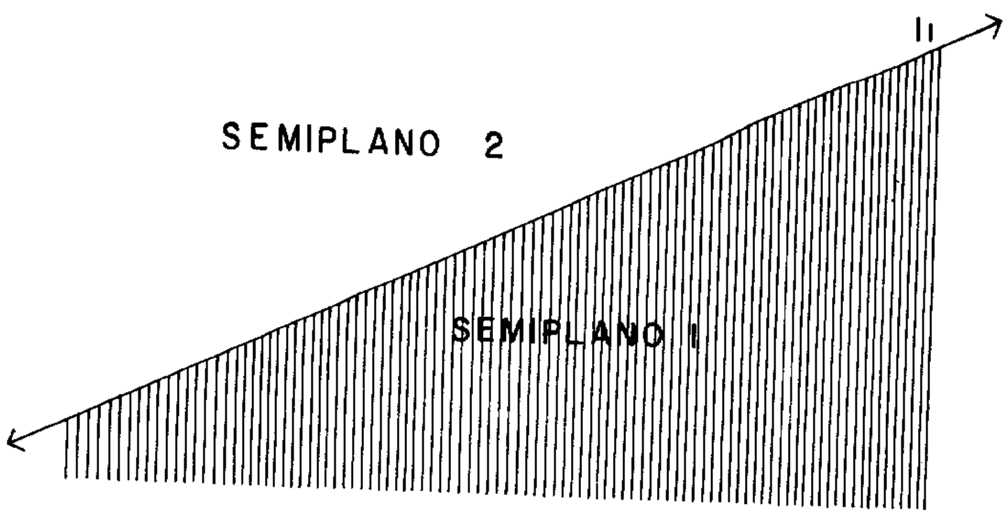
b) Por su forma.

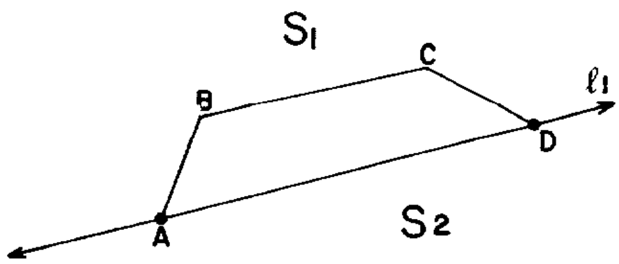
La siguiente es una propiedad que nos servirá para hacer otra clasificación de los polígonos:

Cualquier recta en el plano divide a éste en tres conjuntos ajenos:

La recta misma y dos semiplanos.

Observa:



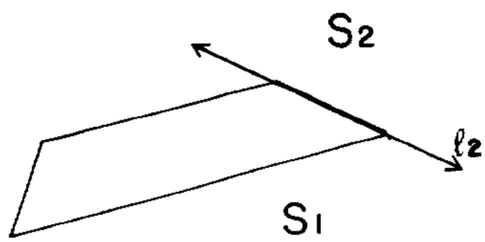


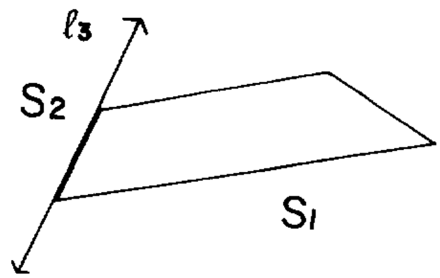
En este polígono, la recta ℓ_1 determinada por los vértices A y D separa el plano en dos semiplanos S_1 y S_2.

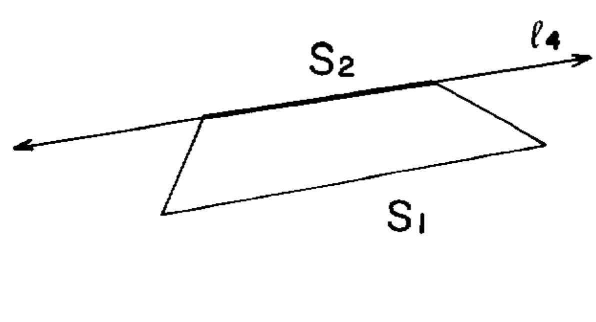
Además los otros lados del polígono no quedan contenidos en un mismo semiplano.

Para cada uno de los lados del polígono ABCD podemos hacer algo similar a lo hecho para el lado $\overline{AD}$.

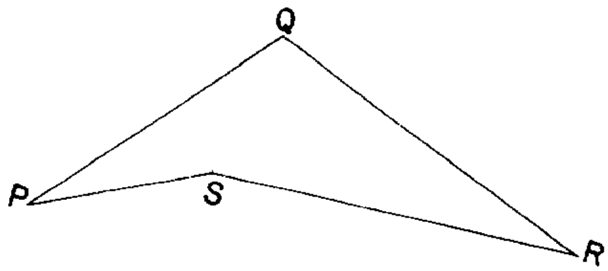
Observa:



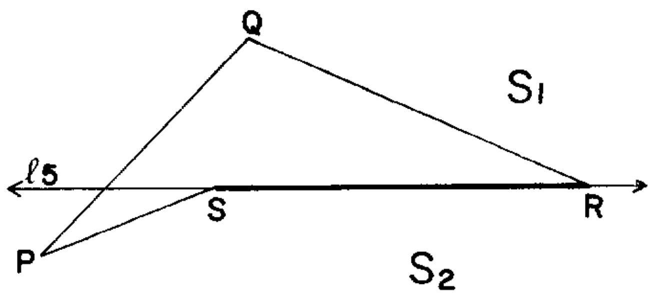




¿Podemos decir lo mismo para el polígono PQRS?



Si consideramos la siguiente figura podemos obtener la respuesta:



La recta ℓ_5 que contiene al lado $\overline{SR}$ del polígono, divide al plano en dos semiplanos y no sucede que los otros lados del polígono queden en un mismo semiplano.

Por ejemplo:

$$\overline{PS} \subset S_2 \quad y \quad \overline{QR} \not\subset S_2$$

Definición: Un polígono es cóncavo si tiene, al menos, un lado tal que: la recta que lo contiene divide al polígono en dos partes, una contenida en un semiplano y la otra contenida en el otro semiplano.

Otros ejemplos;

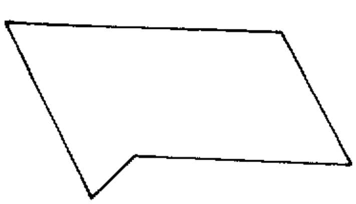


Fig. (1)

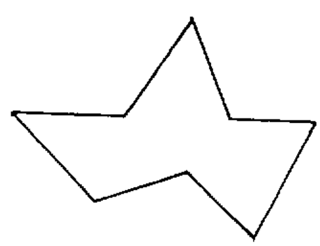
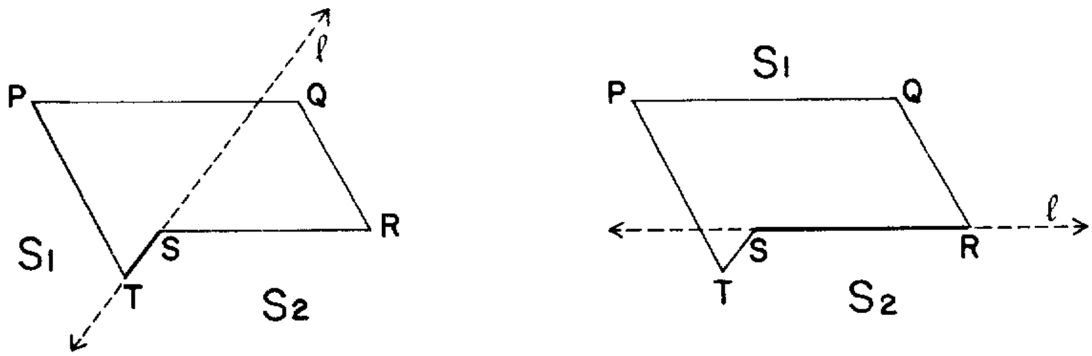


Fig. (2)

Los polígonos anteriores son cóncavos, observa lo siguiente:



Para el polígono de la figura 1 existen dos lados, en los que: las rectas que contienen a cada uno de ellos, dividen al polígono en dos partes contenidas en semiplanos diferentes.

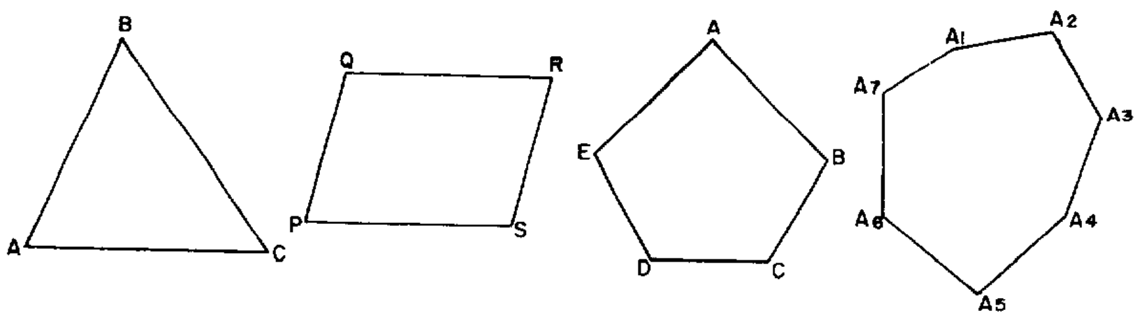
EJERCICIO:

Explica por qué el polígono de la figura (2) es cóncavo. ______________________

____

Definición: Un polígono que no es concavo recibe el nombre de convexo

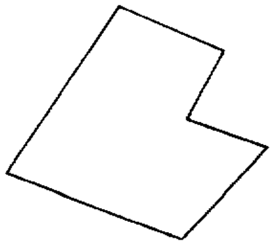
Ejemplos:



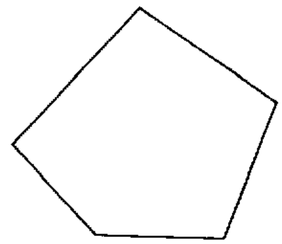
Los polígonos anteriores son convexos, porque no es posible encontrar para ellos una recta que contenga a uno de sus lados y que los divida en dos partes contenidas en diferentes semiplanos.

EJERCICIO:

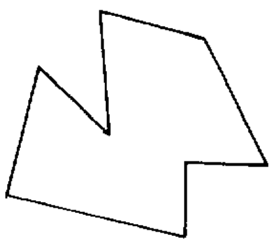
Para cada uno de los siguientes polígonos escribe, en el paréntesis correspondiente un 1 si el polígono es convexo, y un 2 si el polígono es cóncavo.



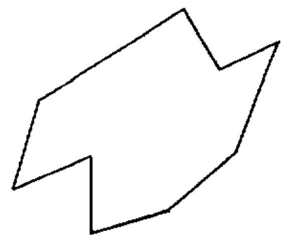
( )



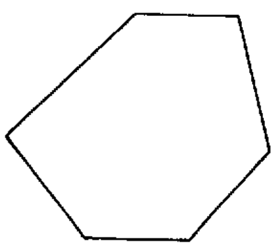
( )



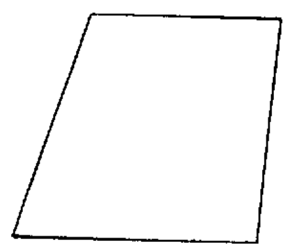
( )



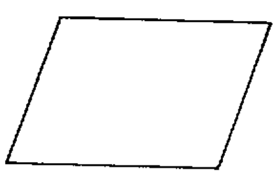
( )



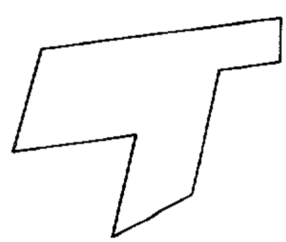
( )



( )

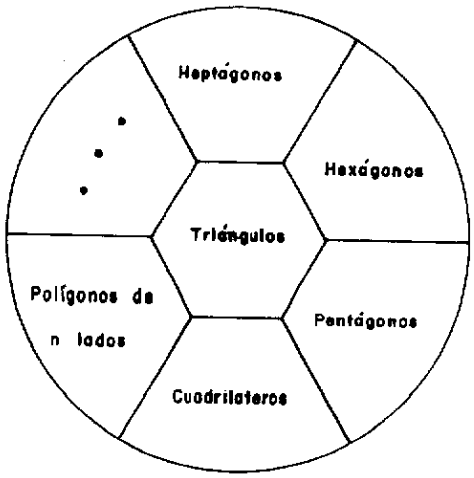


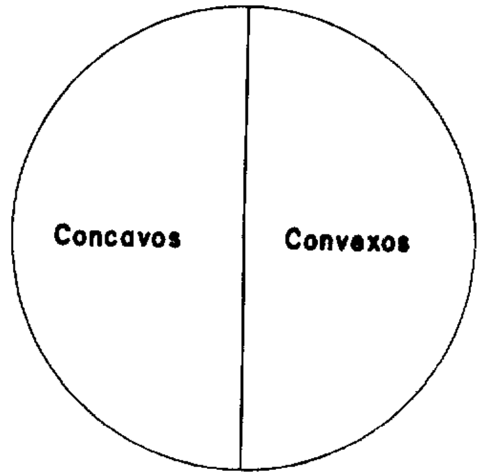
( )



( )

Resumiendo lo anterior, podemos decir que tenemos dos clasifaciones de los polígonos. Ilustramos esto con los siguientes diagramas:





EJERCICIO:

Responde las siguientes preguntas:

1) ¿Un triángulo puede ser cóncavo? ____________porque: ____________________

2) ¿Todos los cuadriláteros son convexos? __________Ejemplifica tu respuesta dibujando cuadriláteros.

3) ¿Todos los pentágonos son cóncavos? ______________Ejemplifica tu respuesta.

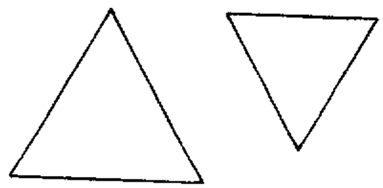
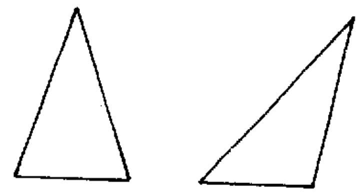
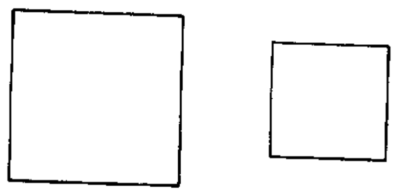
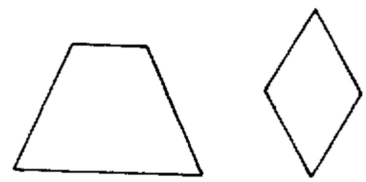
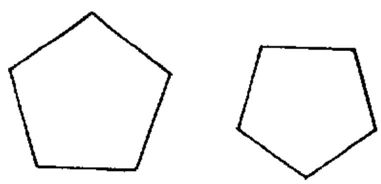
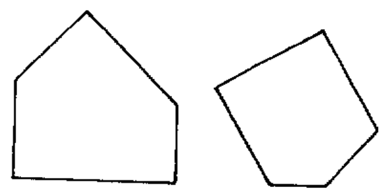
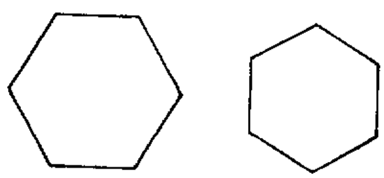
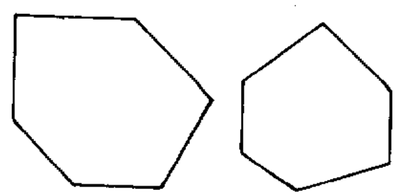
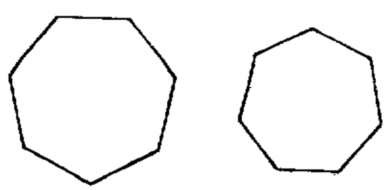
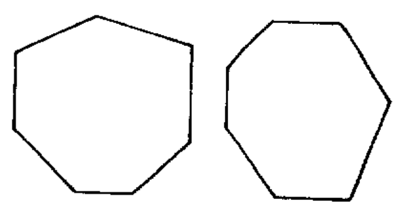
POLIGONOS CONVEXOS

De aquí en adelante nos dedicaremos exclusivamente al estudio de polígonos convexos.

Los polígonos convexos se clasifican en regulares e irregulares.

Un polígono es regular si sus lados son congruentes (miden lo mismo) y sus ángulos también. En caso contrario se dice que el polígono es irregular.

La siguiente tabla resume la clasificación de los polígonos convexos en regulares e irregulares.

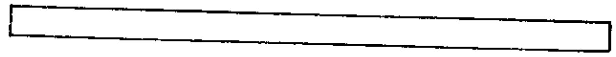
	REGULARES	IRREGULARES
TRIANGULOS		
CUADRILATEROS		
PENTAGONOS		
HEXAGONOS		
HEPTAGONOS		
⋮	⋮	⋮

ACTIVIDADES:

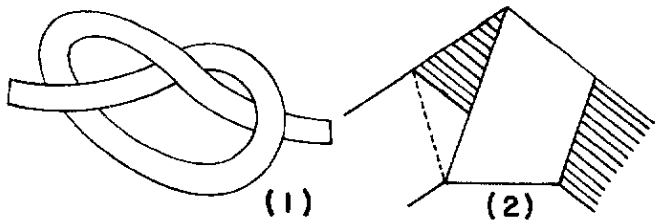
1) Una forma interesante de obtener polígonos regulares es atando nudos de papel. A continuación te presentamos dos formas de obtener polígonos regulares.

a) Pentágono regular.

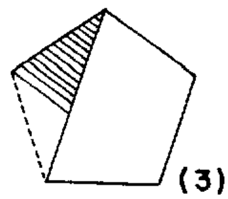
Se utiliza una tira de papel larga y de ancho constante.



Se hace un nudo como lo muestra la figura (1), se aprieta y se forman los pliegues para obtener la figura (2).

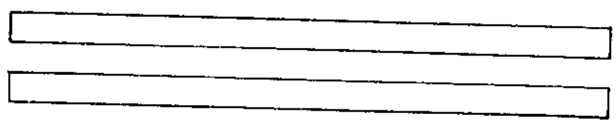


Se cortan las piezas sobrantes y se obtiene el pentágono de la figura (3)

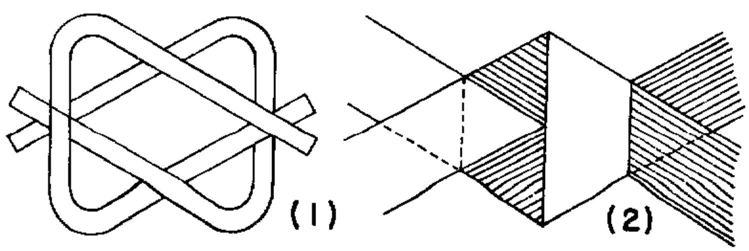


b) Hexágono regular.

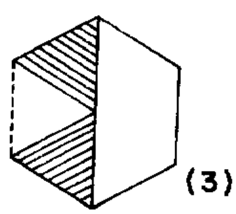
Se utilizan dos tiras de papel de igual largo y ancho.



Se hace un nudo como lo muestra la figura (1), se aprieta y se forman los pliegues para obtener la figura (2).



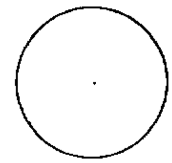
Se cortan las piezas sobrantes y se obtiene el hexágono regular de la figura (3).



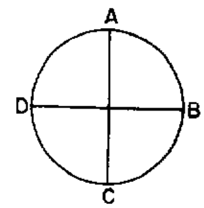
2) Otra forma de obtener algunos polígonos regulares es utilizando regla y compás.

a) Cuadrado.

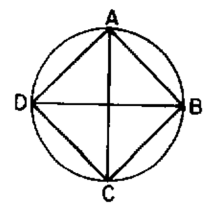
Se traza una circunferencia con radio arbitrario.



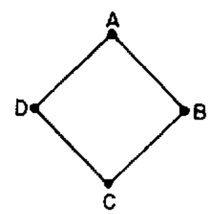
Se trazan dos diámetros perpendiculares y se determinan los puntos de intersección con la circunferencia A, B, C y D.



Se trazan los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.



El polígono ABCD es un cuadrado.

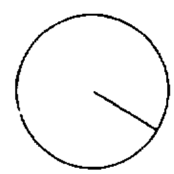


¿Podrás utilizar estos trazos para obtener un octágono regular? ______________

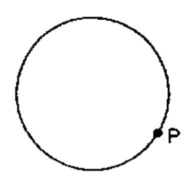
______________________ Explica tu respuesta.

b) Hexágono regular.

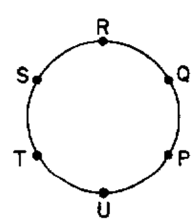
Se traza una circunferencia con radio arbitrario.



Se marca cualquier punto de la circunferencia.

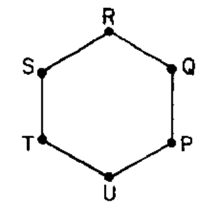


Partiendo de este punto y con una abertura del compás igual al radio de la circunferencia trazada, se marcan puntos sucesivos de la misma (Q, R, S, T y U).

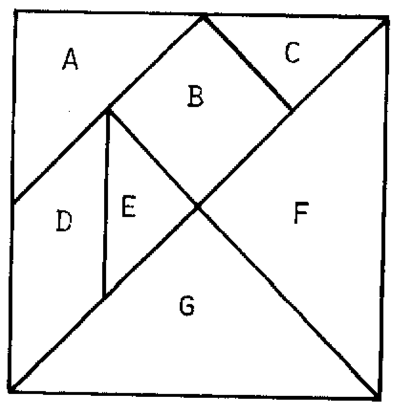


El polígono determinado por estos seis puntos es un hexágono regular.

¿Podrás utilizar estos trazos para obtener un triángulo equilátero? _______________ Explica tu respuesta.



3) Calca en cartulina la siguiente figura y recorta cuidadosamente las piezas señaladas.



a) Completa anotando el nombre en los renglones de la figura correspondiente:

A: _______________

B: _______________

C: _______________

D: _______________

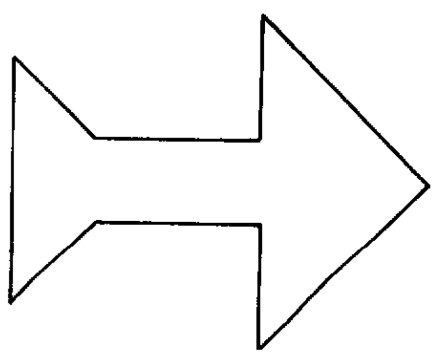
E: _______________

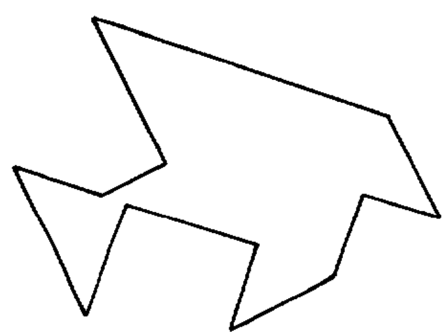
F: _______________

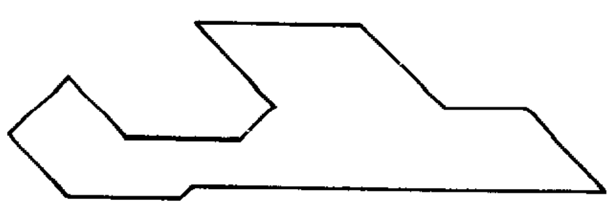
G: _______________

b) ¿Con cuáles de las figuras recortadas puedes formar: un cuadrado?, un triángulo? un rectángulo?.

c) Utiliza todas las piezas para obtener las siguientes figuras:

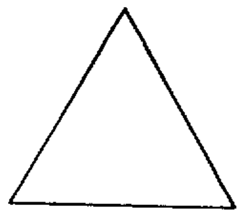
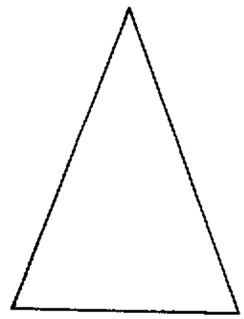
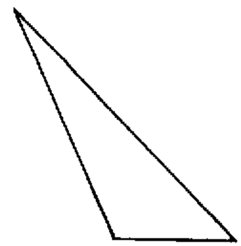
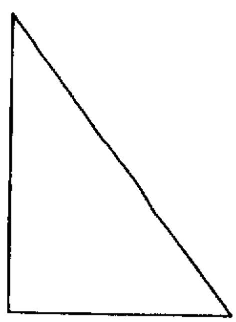
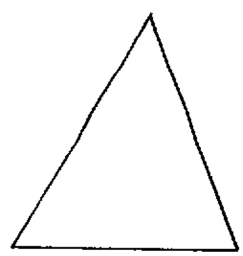
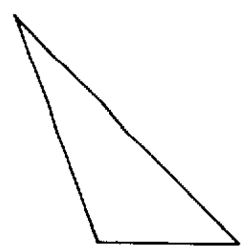






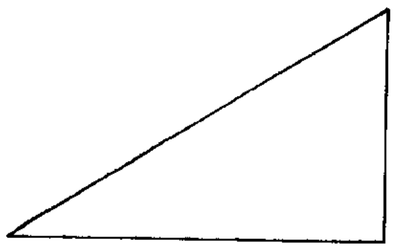
CLASIFICACION DE TRIANGULOS.

El siguiente cuadro resume la clasificación de los triángulos, de acuerdo a la congruencia de sus lados y a la medida de sus ángulos.

POR LA CONGRUENCIA DE SUS LADOS	EQUILATERO  Sus tres lados son congruentes	ISOSCELES  Dos de sus lados son congruentes	ESCALENO  Ningún par de lados es congruente
POR LA MEDIDA DE SUS ANGULOS	RECTANGULO  Tiene un ángulo recto.	ACUTANGULO  Sus tres ángulos son agudos	OBTUSANGULO  Uno de sus ángulos es obtuso

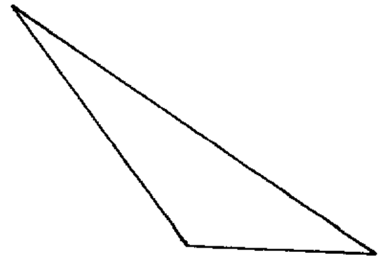
EJERCICIOS:

a) Anota el nombre que reciben los siguientes triángulos de acuerdo a la congruencia de sus lados y a la medida de sus ángulos.



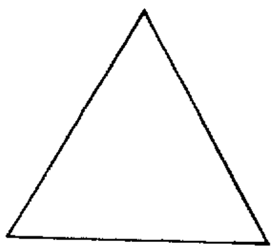
Congruencia entre lados Escaleno

Medida de sus ángulos Rectángulo



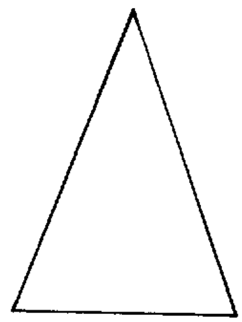
Congruencia entre lados ____________

Medida de sus ángulos ____________



Congruencia entre lados ____________

Medida de sus ángulos ____________



Congruencia entre lados ____________

Medida de sus ángulos ____________

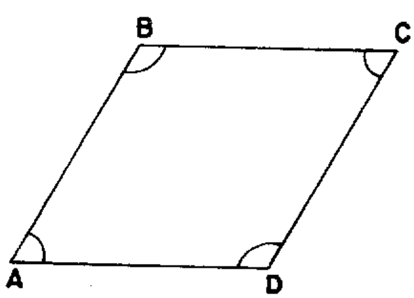
b)

¿Puedes trazar un triángulo que tenga 2 ángulos obtusos?
¿Qué problemas encuentras?
¿Puedes trazar un triángulo que tenga un ángulo obtuso y uno recto?
¿Qué problemas encuentras?

CUADRILATEROS.

En todo cuadrilátero podemos identificar relaciones entre sus elementos.

Observa el siguiente cuadrilátero:



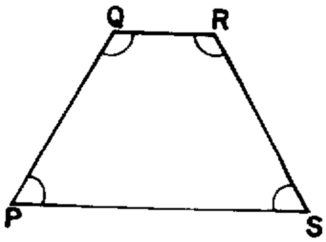
En el cuadrilátero ABCD $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son lados opuestos. De igual manera que $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$.

Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos, tienen un extremo en común, que es el punto B.

Los ángulos ∢ A y ∢ D son consecutivos, tienen un lado común, que es el lado $\overline{AD}$.

Los ángulos ∢ A y ∢ C son opuestos por no ser consecutivos.

Ejemplo:



Lados consecutivos: $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RS}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$, $\overline{SP}$ y $\overline{PQ}$.

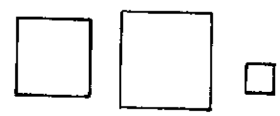
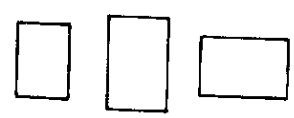
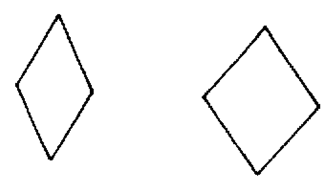
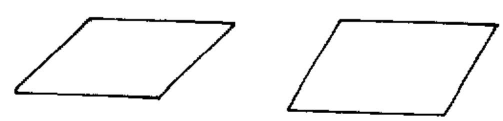
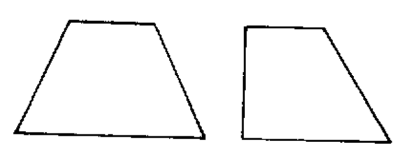
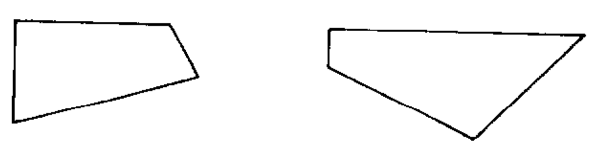
Lados opuestos: $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PS}$.

Angulos consecutivos: $\sphericalangle$ P y $\sphericalangle$ Q, $\sphericalangle$ Q y $\sphericalangle$ R, $\sphericalangle$ R y $\sphericalangle$ S, $\sphericalangle$ S y $\sphericalangle$ P.

Angulos opuestos: $\sphericalangle$ P y $\sphericalangle$ R, $\sphericalangle$ Q y $\sphericalangle$ S.

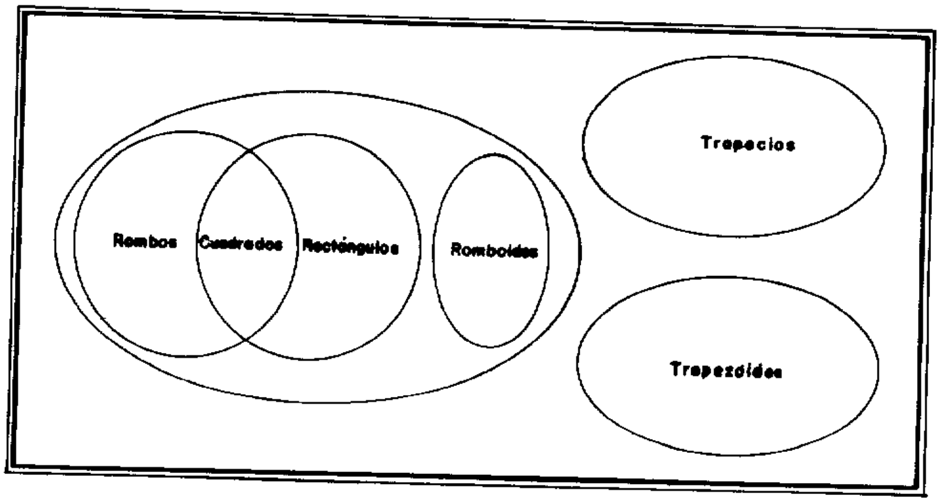
CLASIFICACION DE CUADRILATEROS.

Para clasificar los cuadriláteros, se toma en consideración la relación de paralelismo entre sus lados y las relaciones de congruencia entre sus lados y entre sus ángulos.

PARALELOGRAMOS: Cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos.	CUADRADOS: Todos sus lados son congruentes y también sus ángulos.	
	RECTANGULOS: Todos sus ángulos son congruentes.	
	ROMBOS: Todos sus lados son congruentes.	
	ROMBOIDES: Los lados opuestos son congruentes tienen dos ángulos agudos y dos obtusos.	
TRAPECIOS: Cuadriláteros que tienen solo un par de lados paralelos.		
TRAPEZOIDES: Cuadriláteros que no tienen algún par de lados paralelos.		

La clasificación de los cuadriláteros puede representarse mediante el siguiente diagrama de Venn.

CUADRILATEROS.



Observa que los cuadrados tienen las propiedades que caracterizan a los rectángulos y a los rombos.

EJERCICIOS:

a) Califica las siguientes proposiciones, anotando en el paréntesis falso o verdadero según corresponda.

Todo cuadrado es un rombo ( )

Todo rectángulo es un cuadrado ( )

Algunos rectángulos son cuadrados ( )

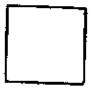
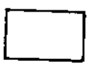
Todo cuadrado es un paralelogramo ( )

Todo paralelogramo es un trapecio ( )

b) Dibuja los siguientes cuadriláteros.

1.- Cuadrado
2.- Romboide
3.- Rombo
4.- Trapecio
5.- Trapezoide
6.- Rectángulo
7.- Paralelogramo

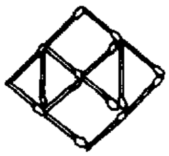
c) Marca con una cruz para indicar si la figura corresponde al cuadrilátero mencionado en el renglón superior de la tabla. Observa el ejemplo.

Nombre / Figura	Trapezoide	Trapecio	Paralelogramo	Rombo	Rectángulo	Cuadrado	Romboide	
			X	X	X	X		
								
								
								
								
								
								
								
								
								
								

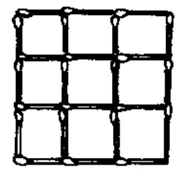
ACTIVIDADES:

a) Utiliza tus conocimientos sobre polígonos para obtener lo que se te pide en cada una de las siguientes figuras formadas con cerillos. Ten a la mano cerillos para reproducirlas.

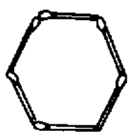
1) Quita cuatro cerillos de tal forma que te queden cuatro triángulos equiláteros.



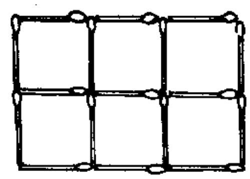
2) Quita cuatro cerillos para obtener cinco cuadrados.



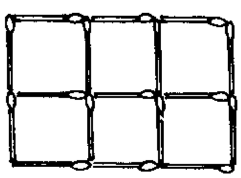
3) Cambia dos cerillos de posición y agrega otro para formar dos rombos.



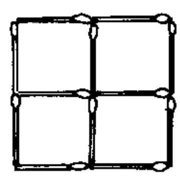
4) Quita cinco cerillos para dejar tres cuadrados del mismo tamaño que el de los originales.



5) Quita seis cerillos para obtener tres cuadrados.



6) Cambia de lugar tres cerillos para obtener tres cuadrados iguales.



b) Corta seis tiras de estambre de 5, 7, 9, 11, 13 y 15 centímetros de largo. Trata de construir los triángulos requeridos de tal manera que sus lados tengan las medidas de las tiras en cada uno de los casos.

5 cm.

7 cm.

9 cm.

11 cm.

13 cm.

15 cm.

1.- Con las tiras de 5, 7 y 9 centímetros.

2.- Con las tiras de 5, 7 y 15 centímetros.

3.- Con las tiras de 9, 11 y 13 centímetros.

4.- Con las tiras de 5, 7 y 13 centímetros.

5.- Con las tiras de 11, 13 y 15 centímetros.

Te habrás dado cuenta que dos de los cinco triángulos requeridos no pudieron construirse. La razón de ésto se establece con la siguiente propiedad de la relación que hay entre los lados de un triángulo:

> En cualquier triángulo el lado mayor es menor que la suma de los otros dos.

Esta propiedad presupone que cualquier triángulo tiene un lado mayor. Este no es el caso para los triángulos equiláteros, sin embargo la propiedad deberá entenderse como:

Cualquiera de los lados es menor que la suma de los otros dos.

EJERCICIO:

Para cada una de las ternas de números dados, escribe en el paréntesis correspondiente SI, en caso de que sea posible construir un triángulo cuyos lados tengan esas medidas. En caso contrario, escribe NO.

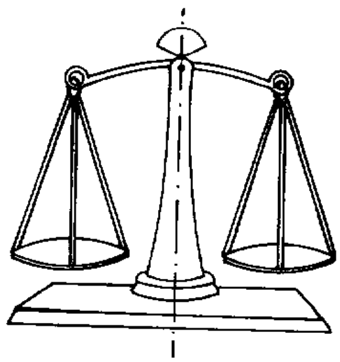
5	7	12	( )
10	15	22	( )
9	8	19	( )
7	6	10	( )
9	9	13	( )
9	9	9	( )
6	7	15	( )

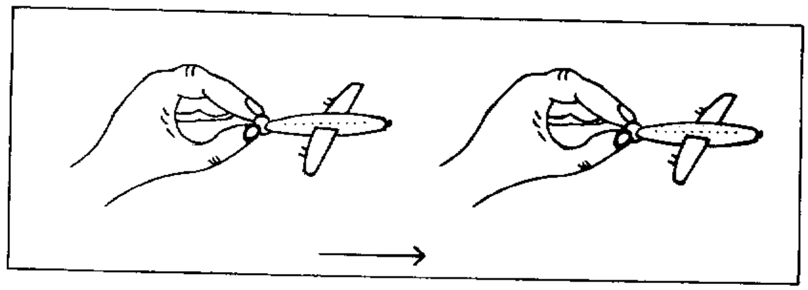
CONGRUENCIA ENTRE TRIANGULOS.

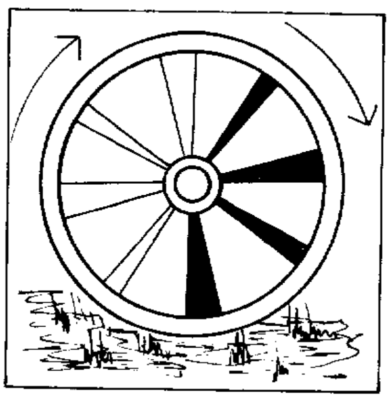
En la séptima unidad de tu segundo curso estudiaste congruencias entre figuras.

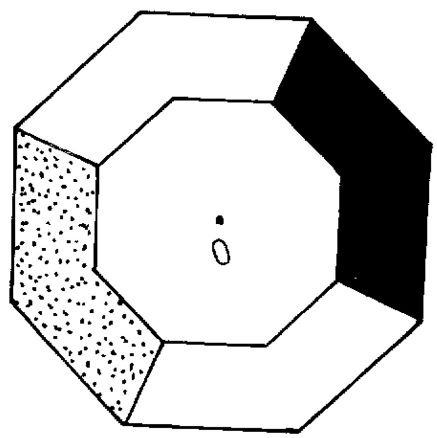
Ahí se dijo que:

Dos figuras son congruentes si a través de un movimiento rígido se puede obtener una a partir de la otra.









1) En la balanza, la parte izquierda es congruente con la parte derecha. Son simétricas axialmente.

2) Los aviones son congruentes. Uno puede obtenerse del otro a través de una traslación.

3) En la rueda, la parte obscura se puede obtener a partir de la parte clara por medio de una rotación. Estas partes son congruentes.

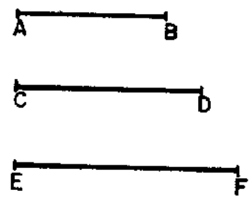
4) En la tuerca, la parte obscura y la parte punteada son congruentes, porque son simétricas con respecto al punto O.

De hecho, dos figuras son congruentes si se pueden superponer coincidiendo en todos sus puntos.

A continuación establecemos tres postulados de congruencia entre triángulos a partir de la congruencia entre sus lados y entre sus ángulos:

POSTULADO L L L.

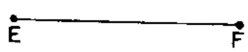
Consideremos tres segmentos de recta, tales que el mayor sea menor a la suma de los otros dos.



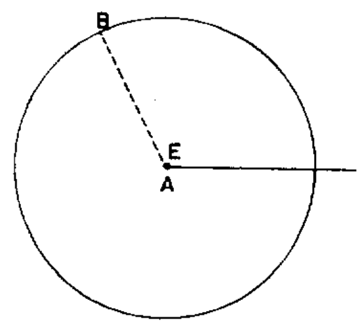
Tracemos un triángulo que tenga por lados, segmentos congruentes a los anteriores.

Para ello se pueden seguir las siguientes indicaciones:

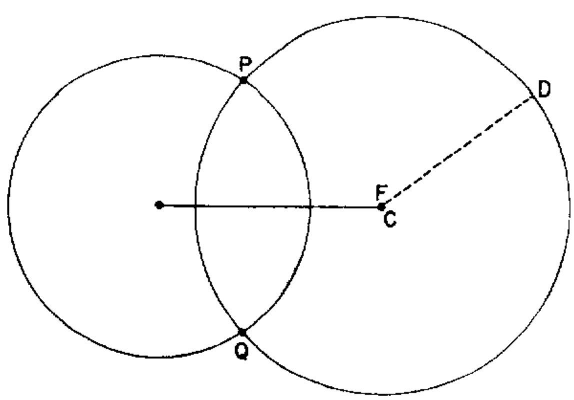
1.- Tracemos una semirecta en la que se determine un segmento congruente a $\overline{EF}$.



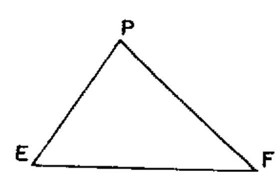
2.- Tracemos una circunferencia de radio $\overline{AB}$ y centro en E.



3.- Tracemos una circunferencia de radio $\overline{CD}$ y centro en F.



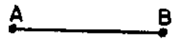
4.- Las dos circunferencias se intersecan en dos puntos, P y Q. Para trazar el triángulo pedido utilizamos uno de estos puntos y los puntos E y F.



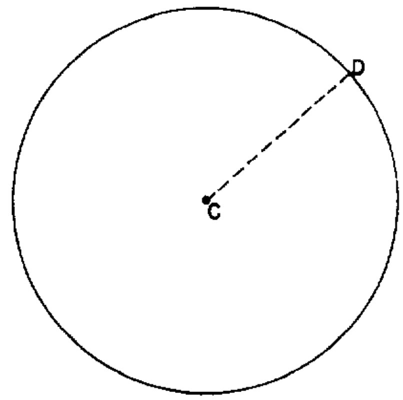
Para trazar el triángulo EPF consideramos el punto P, también se puede considerar el punto Q.

En el triángulo EPF tenemos que: $\overline{PE} = \overline{AB}$ y $\overline{PF} = \overline{CD}$

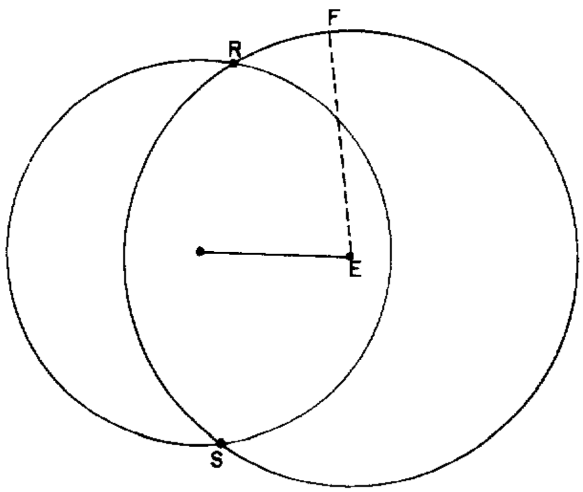
b) Ahora, tracemos otro triángulo con el mismo procedimiento, pero iniciando con el segmento $\overline{AB}$.



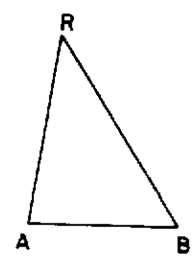
Paso 1



Paso 2



Paso 3



Paso 4

En una hoja de papel, copia el triángulo A R B. Recórtalo y superponlo al triángulo E P F.

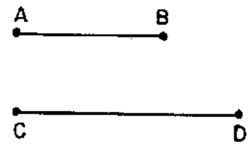
Los triángulos A R B y E P F coinciden en todos sus puntos.

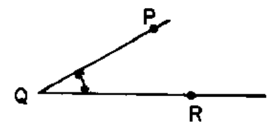
De lo anterior, podemos enunciar el postulado L L L (lado, lado, lado):

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son congruentes.

POSTULADO L A L.

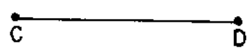
Consideremos dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y un ángulo P Q R menor a 180°.



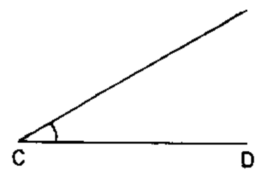


a) Tracemos un triángulo que tenga dos lados congruentes a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y al ángulo entre éstos congruente al ángulo P Q R. Para esto, se pueden seguir las siguientes indicaciones.

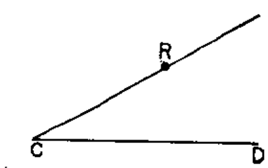
1.- Tracemos un segmento congruente a $\overline{CD}$.



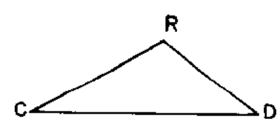
2.- Tracemos un ángulo. Congruente a ∢ P Q R cuyo vértice sea C. Y uno de sus lados sea $\overline{CD}$.



3.- Determinamos un segmento $\overline{CR}$ congruente a $\overline{AB}$ en el mismo lado del ángulo.

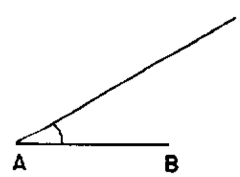


4.- Tracemos el segmento $\overline{RD}$ para obtener el triángulo requerido.

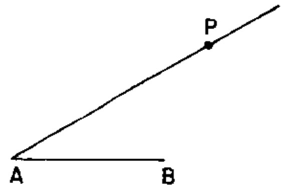


b) Tracemos otro triángulo en forma similar; pero ahora iniciando con el lado $\overline{AB}$.

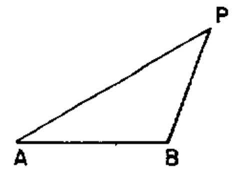
Paso 1



Paso 2



Paso 3



Paso 4

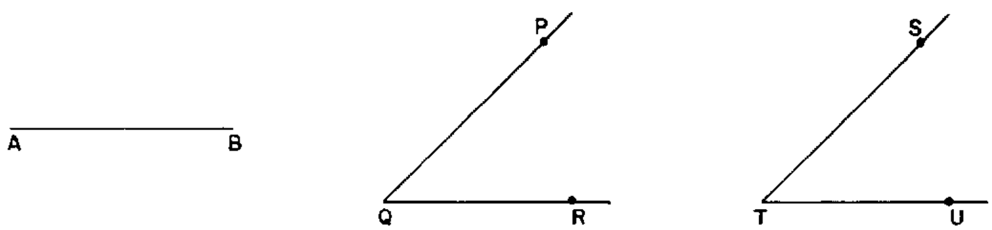
En una hoja de papel, copia el triángulo A B P. Recórtalo y superponlo al -- triángulo C D R.

Los triángulos A B P y C D R coinciden en todos sus puntos. Por lo que podemos establecer el postulado L A L (lado, ángulo, lado):

> Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido de uno, son congruentes con las partes correspondientes del otro.

POSTULADO A L A.

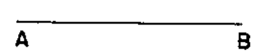
Consideremos un segmento AB y dos ángulos $\measuredangle$ P Q R y $\measuredangle$ S T U cuya suma sea menor de 180°.



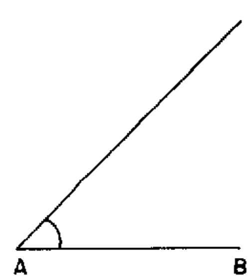
a) Tracemos un triángulo que tenga dos lados congruentes a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y el ángulo entre estos congruentes al ángulo P Q R.

Para esto, se pueden seguir las siguientes indicaciones:

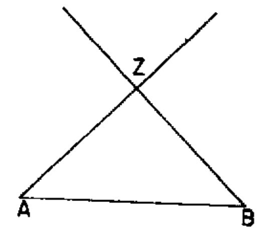
1.- Tracemos un segmento congruente a $\overline{AB}$.



2.- Tracemos un ángulo congruente a $\measuredangle$P Q R cuyo vértice sea A y uno de sus lados sea $\overline{AB}$.



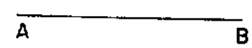
3.- Tracemos un ángulo congruente a $\measuredangle$S T U cuyo vértice sea B y uno de sus lados sea AB,- como en la figura.



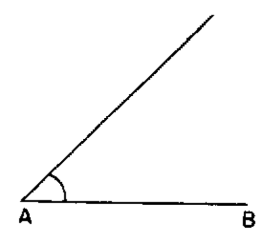
4.- Los lados no comunes de los ángulos se intersecan en el punto Z determinando el triángulo A B Z.

b) Ahora, tracemos otro triángulo considerando el segmento $\overline{AB}$ y los ángulos -- $\measuredangle$PQR y $\measuredangle$STU. Sigamos las indicaciones dadas:

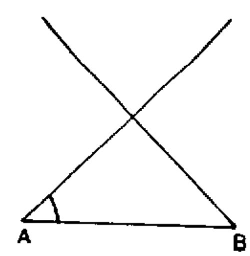
1.- Tracemos un segmento congruente a $\overline{AB}$.



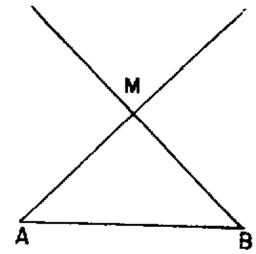
2.- Tracemos un ángulo congruente a $\measuredangle$STU cuyo - vértice sea A y uno de sus lados sea $\overline{AB}$.



3.- Tracemos un ángulo congruente a $\measuredangle$PQR cuyo - vértice sea B y uno de sus lados sea $\overline{AB}$,- como en la figura.



4.- Los lados no comunes de los ángulos se intersecan en el punto M determinando el triángulo ABM:



En una hoja de papel, copia el triángulo ABM, recórtalo y suporponlo al triángulo ABZ.

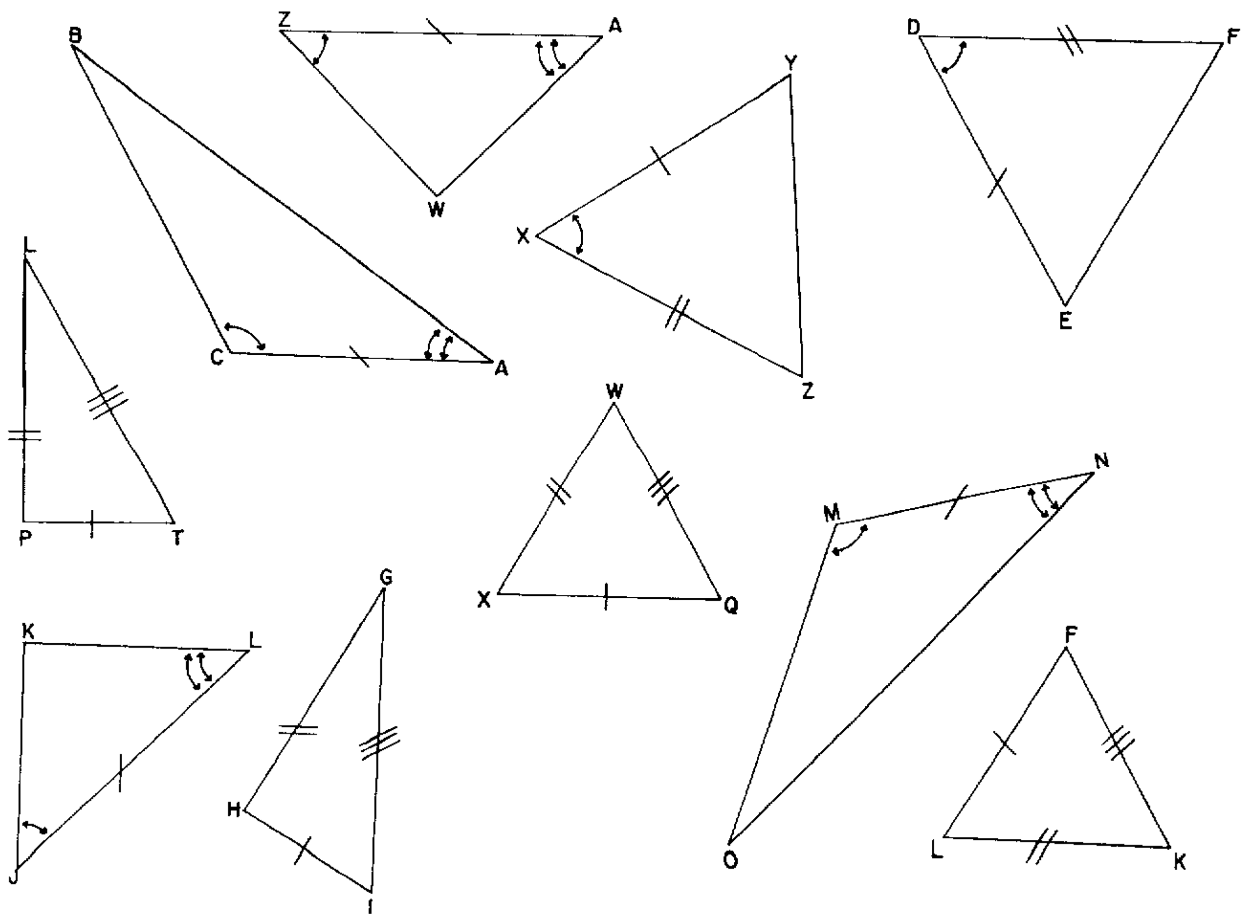
Los triángulos ABM y ABZ coinciden en todos sus puntos.

De lo anterior, podemos enunciar el postulado A L A (ángulo, lado, ángulo).

> Dos triángulos son congruentes, si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de uno de los triángulos, son congruentes con las partes correspondientes del otro.

EJERCICIOS:

a) Considerando los datos que se dan de los siguientes triángulos, identifica las parejas de triángulos congruentes. Escribe el postulado que justifica tus respuestas.



El triángulo ABC es congruente con el triángulo ______, por el postulado ____

El triángulo DEF es congruente con el triángulo ______, por el postulado ____

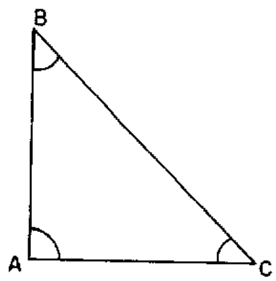
El triángulo GHI es congruente con el triángulo ______, por el postulado ____

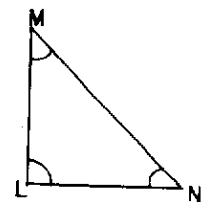
El triángulo JKL es congruente con el triángulo ______, por el postulado ____

El triángulo WXY es congruente con el triángulo ______, por el postulado ____

b) Utiliza tu transportador para medir los ángulos de cada par de triángulos y -- responde las preguntas correspondientes.

1)





∢ A = ______

∢ B = ______

∢ C = ______

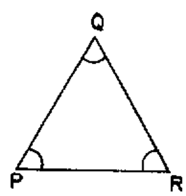
∢ L = ______

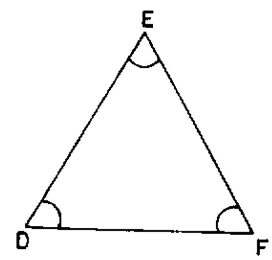
∢ M = ______

∢ N = ______

¿Son congruentes los triángulos ABC y LMN? ____________________

2)





∢ P = ______

∢ Q = ______

∢ R = ______

∢ D = ______

∢ E = ______

∢ F = ______

¿Son congruentes los triángulos PQR y DEF? ____________________

Del ejercicio (b) podemos concluir que:

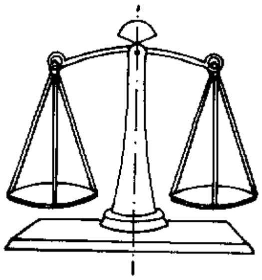
Los ángulos de un triángulo pueden ser congruentes con los ángulos de otro. Sin embargo, esto no es suficiente para establecer que los triángulos son congruentes.

Es decir:

No hay postulado A A A (ángulo, ángulo, ángulo) para congruencias entre triángulos.

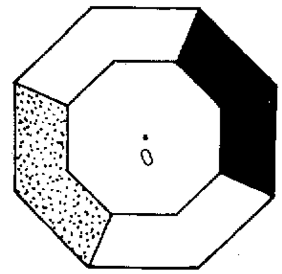
CONGRUENCIA DIRECTA E INVERSA DE TRIANGULOS.

Con objeto de recordar la congruencia entre figuras, utilizamos en páginas anteriores las siguientes ilustraciones.



(1)

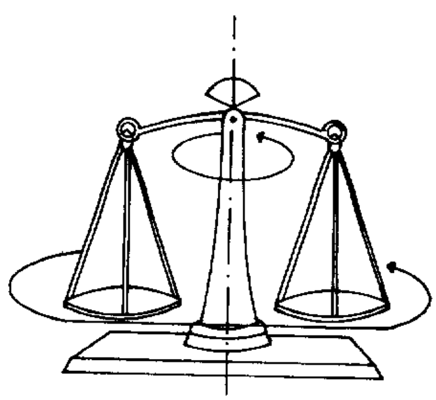
(2)



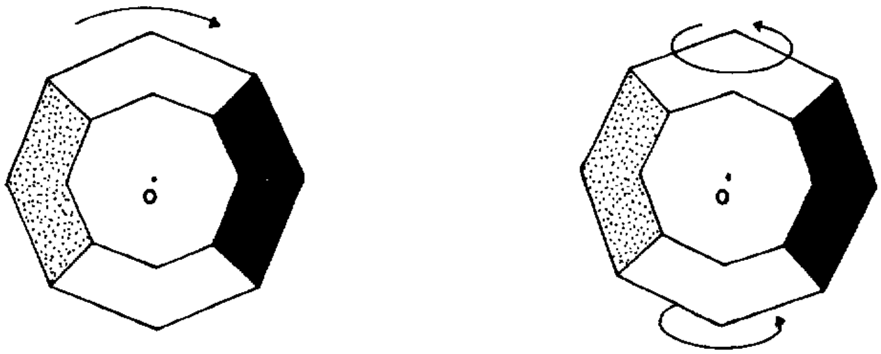
(3)

En el dibujo (2) las figuras congruentes pueden llevarse una sobre la otra (superponerse), sin deformarlas ni levantarlas del plano. Decimos que hay una congruencia directa en estas figuras.

En el dibujo (1), para superponer las partes congruentes, es necesario levantar y voltear una de estas. En este caso decimos que hay una congruencia inversa-- entre las partes de la figura.



Puede darse el caso que dos figuras o dos partes de una, sean congruentes directa e inversamente, tal es el caso de las partes congruentes del dibujo (3).

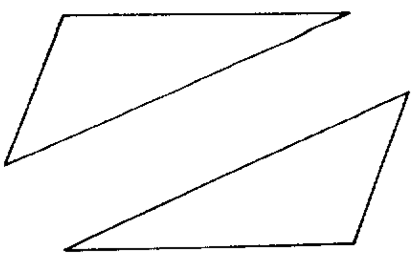


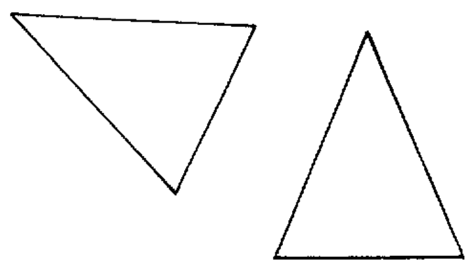
Como podemos darnos cuenta, a partir de una rotación o una traslación obtenemos dos figuras en las que existe una congruencia directa y, al obtener figuras congruentes por medio de una simetría axial, la congruencia entre las figuras es inversa.

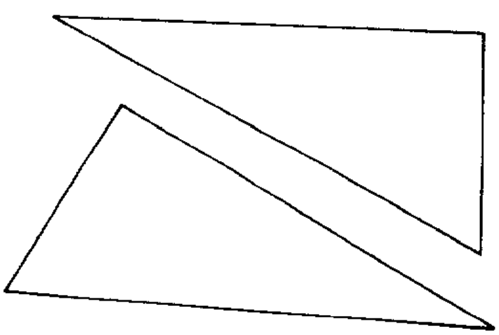
La propiedad anterior es válida para triángulos en particular.

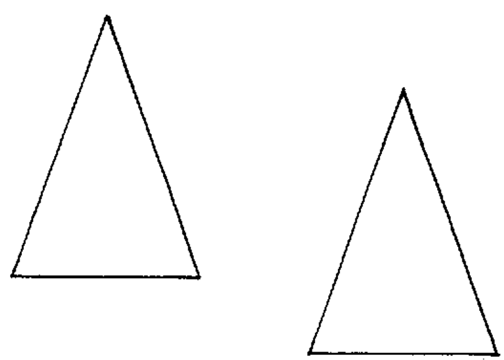
EJERCICIO:

Para cada par de triángulos, especifica el tipo de congruencia entre ellos. Escribe sobre la línea correspondiente: Según sea el caso, congruencia directa o congruencia inversa.









PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS.

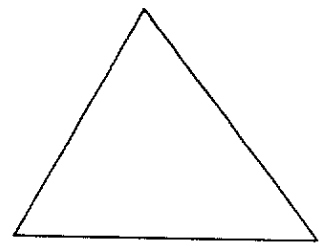
Suma de los ángulos interiores de un triángulo.

El triángulo es el polígono más simple que puede trazarse, y el estudio de sus propiedades es fundamental para comprender las propiedades de los demás polígonos; por ello es conveniente realizar un estudio minucioso de sus propiedades. Iniciaremos el estudio de las propiedades del triángulo observando la relación que hay entre sus ángulos. Es decir, intentemos dar respuesta a la pregunta ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?

Las siguientes actividades nos ayudarán a contestar la pregunta anterior.

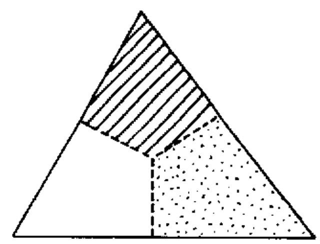
a) Dibuja un triángulo cualquiera en una hoja de papel y recórtalo. Figura (1)

Figura 1



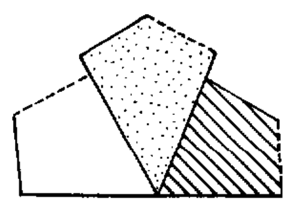
Corta el triángulo en tres partes de manera que en cada una de ellas quede contenido un ángulo del triángulo. Figura (2)

Figura 2



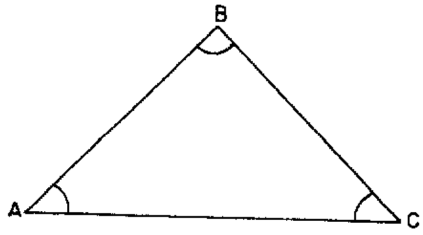
Acomoda las piezas obtenidas de forma que los ángulos del triángulo queden uno a continuación del otro. Figura (3)

Figura 3



¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ________________

b) Para cada uno de los triángulos dados, completa lo que se pide.



$\sphericalangle A =$ ________________

$\sphericalangle B =$ ________________

$\sphericalangle C =$ ________________

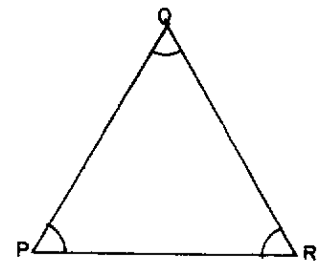
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C =$ ________________

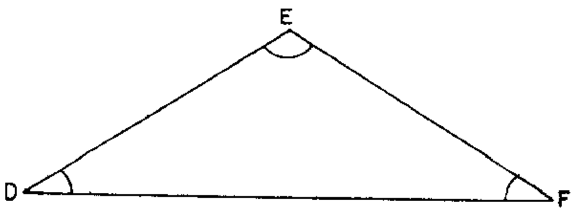
$\sphericalangle P =$ ________________

$\sphericalangle Q =$ ________________

$\sphericalangle R =$ ________________

$\sphericalangle P + \sphericalangle Q + \sphericalangle R =$ ________________





$\sphericalangle D =$ ________________

$\sphericalangle E =$ ________________

$\sphericalangle F =$ ________________

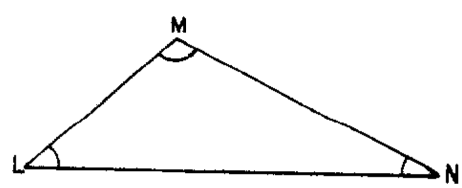
$\sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F =$ ________________

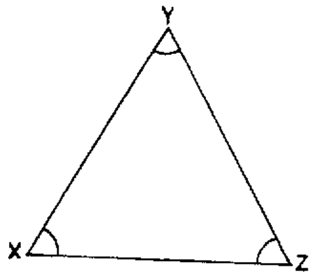
$\sphericalangle L =$ ________________

$\sphericalangle M =$ ________________

$\sphericalangle N =$ ________________

$\sphericalangle L + \sphericalangle M + \sphericalangle N =$ ________________





$\sphericalangle X =$ ____________________

$\sphericalangle Y =$ ____________________

$\sphericalangle Z =$ ____________________

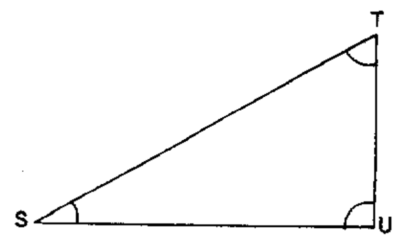
$\sphericalangle X + \sphericalangle Y + \sphericalangle Z =$ ____________________

$\sphericalangle S =$ ____________________

$\sphericalangle T =$ ____________________

$\sphericalangle U =$ ____________________

$\sphericalangle S + \sphericalangle T + \sphericalangle U =$ ____________________



¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ____________________

En las actividades a y b hicimos uso de nuestra intuición y de la medición para saber cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo. Estos procedimientos son de uso frecuente en matemáticas y resultan de gran importancia para intuir o verificar resultados. Sin embargo, hay ocasiones en que estos procedimientos nos inducen al error.

Para ejemplificar esto último, realiza la siguiente actividad:

c) Sigue las instrucciones:

1.- En tu cuaderno traza un cuadrado de 8 unidades por lado, como el de la figura 1.

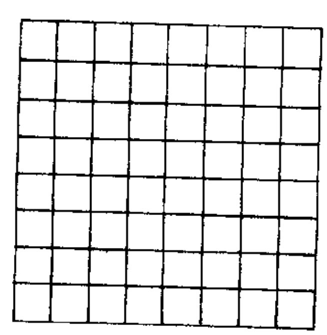


Figura 1

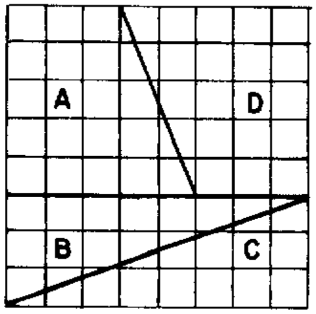


Figura 2

2.- Divide el cuadrado como se muestra- en la figura 2.

3.- Recorta las piezas A, B, C, D y E, y construye la figura 3.

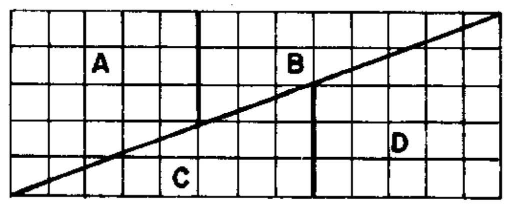


Figura 3

4.- Responde las siguientes pre-- guntas:

¿Cuál es el área de la figura 1? ______________________

¿Cuál es el área de la figura 3? ______________________

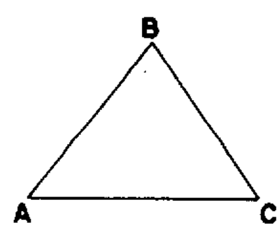
¿Cómo son estas áreas?

____

Para evitar incurrir en errores como el anterior y tener la certeza de resultados propuestos la Matemática, a través de la Lógica, fundamenta éstos al realizar demostraciones. En las siguientes páginas encontrarás pequeñas demostraciones de algunas propiedades geométricas. Llamaremos "teoremas" a las propiedades por - demostrar.

TEOREMA: La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a- 180°.

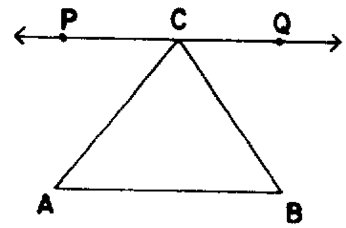
HIPOTESIS: $\sphericalangle$ A, $\sphericalangle$ B y $\sphericalangle$ C son los ángulos interiores del triángulo A B C



TESIS O CONCLUSION:

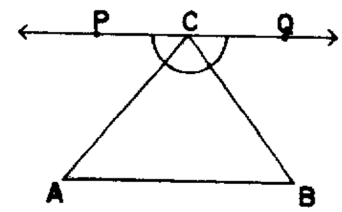
$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$$

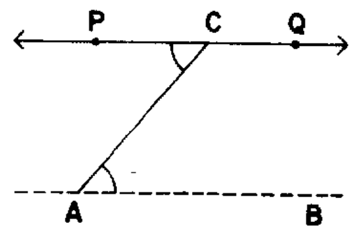
Por el punto C se traza una recta $\overleftrightarrow{PQ}$ paralela a $\overline{AB}$.

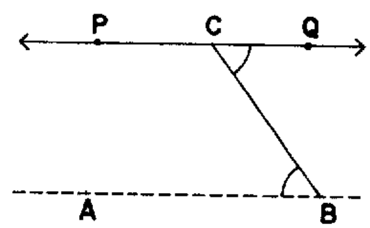


DEMOSTRACION

AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\measuredangle ACP + \measuredangle C + \measuredangle BCQ = 180^\circ$	Por formar un ángulo llano.
2.- $\measuredangle ACP = \measuredangle A$	Por ser ángulos alternos internos.
3.- $\measuredangle BCQ = \measuredangle B$	Por ser ángulos alternos internos.
4.- $\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle B = 180^\circ$	Sustituyendo (2 y 3) en 1.
5.- $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$	Propiedad conmutativa de la suma.







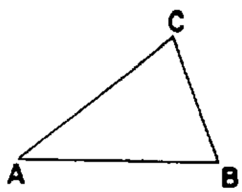
Las siguientes proposiciones son consecuencias directas del teorema anterior.

Por lo que reciben el nombre de corolarios.

1) Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos.
2) Un triángulo no puede tener dos ángulos obtusos.
3) Un triángulo no puede tener un ángulo recto y un obtuso.
4) En un triángulo rectángulo hay dos ángulos agudos cuya suma es igual a 90°
5) Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos de otro, entonces los ángulos restantes también son congruentes.

EJERCICIOS:

a) Aplica el teorema anterior y sus corolarios para encontrar la medida de los ángulos indicados en cada uno de los triángulos.



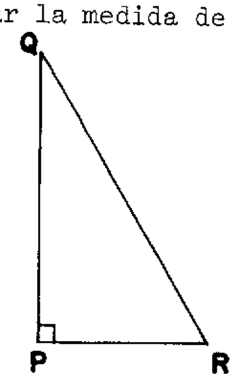
$\measuredangle A$ = 40°

$\measuredangle B$ = 70°

$\measuredangle C$ = ______

$\measuredangle Q$ = 30°

$\measuredangle R$ = ______



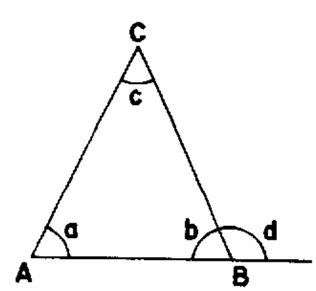
b) Para cada una de las ternas de números dados, escribe en el paréntesis correspondiente SI, en caso de que sea posible construir un triángulo cuyos ángulos interiores tengan esas medidas. En caso contrario escribe NO.

30	110	20	( )
60	90	30	( )
40	60	80	( )
20	30	120	( )
90	45	45	( )
80	50	50	( )

Valor de un ángulo exterior del triángulo.

Si en un triángulo cualquiera se prolonga uno de sus lados, se forma un ángulo exterior.

En el triángulo ABC sus ángulos interiores son <a,<b y <c y uno de sus ángulos exteriores es el <d.



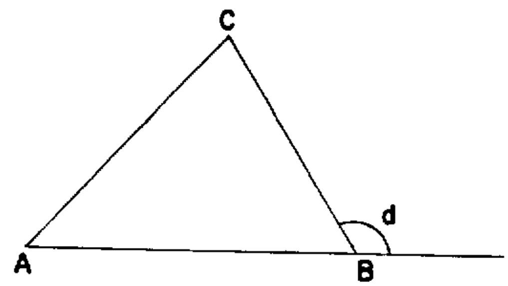
El ángulo exterior de un triángulo y los ángulos interiores del mismo guardan cierta relación que se enuncia de la siguiente forma:

> TEOREMA: Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

A continuación te presentamos la demostración de este teorema.

HIPOTESIS: $\measuredangle$ d es un ángulo exterior del triángulo A B C.

TESIS O CONCLUSION: $\measuredangle d = \measuredangle A + \measuredangle C$

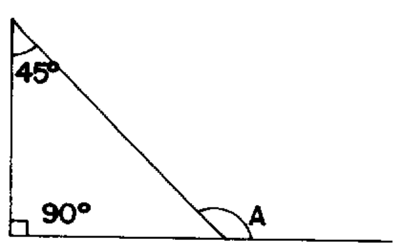


DEMOSTRACION

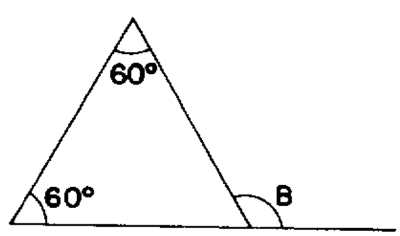
AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\measuredangle B + \measuredangle d = 180°$	Por formar un ángulo llano.
2.- $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$	Por ser ángulos interiores de un triángulo.
3.- $\measuredangle B + \measuredangle d = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$	Por la propiedad transitiva de la igualdad.
4.- $\measuredangle d = \measuredangle A + \measuredangle C$	Propiedad cancelativa de la igualdad.

EJERCICIO:

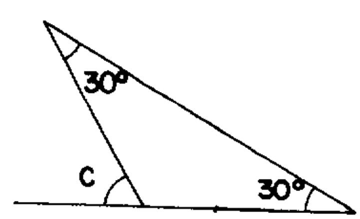
Para cada uno de los siguientes triángulos; calcula el ángulo exterior indicado.



A = ____________



B = ____________

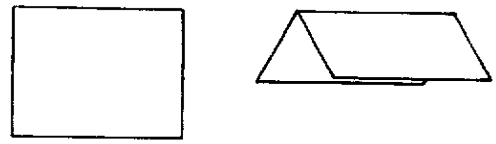


C = ____________

ACTIVIDAD:

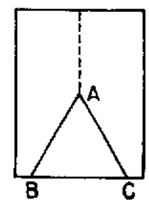
Con el objeto de estudiar otra propiedad de los triángulos, realiza lo siguiente:

1.- Dobla una hoja a la mitad de su ancho.



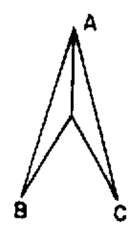
2.- Realiza un nuevo doblez como se indica en la figura

3.- Desdobla la hoja y colócala en forma vertical.



4.- En la marca de los dobleces se distingue el triángulo ABC. Este triángulo es isósceles.

5.- Recorta el triángulo y dóblalo por la bisectriz del ángulo A.



6.- Responde la siguiente pregunta:
¿Cómo son los ángulos B y C? ________________

TEOREMA: Los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

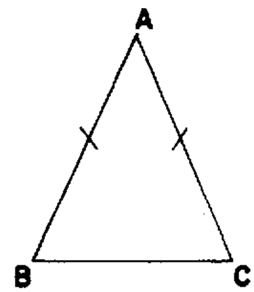
Nuevamente, para tener la certeza de que la propiedad anterior se cumple para todos los triángulos isósceles, se requiere hacer una demostración.

Con objeto de saber cómo podemos realizar esta demostración revisemos la actividad anterior. En el quinto paso, al doblar el triángulo isósceles apreciamos que:

El triángulo A B C queda dividido en dos triángulos congruentes y además, los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes.

Utilizaremos la observación anterior para realizar la demostración:

HIPOTESIS: El triángulo A B C es isósceles, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son congruentes, -- ∢B es opuesto al lado $\overline{AC}$ y ∢C es- opuesto al lado $\overline{AB}$.

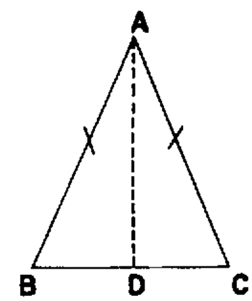


TESIS O CONCLUSION: ∢ B ≅ ∢ C

Se traza la bisectriz $\overline{AD}$ del ángulo A.
El triángulo **ABC** queda dividido en dos triángulos; el Δ ABD y el Δ ADC.

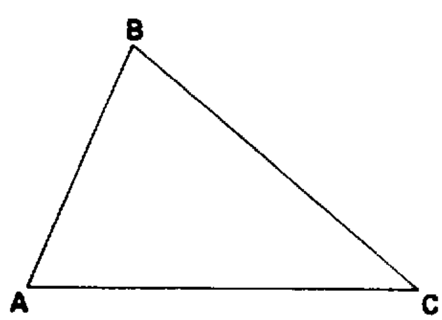
DEMOSTRACION

AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por hipótesis.
2.- $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
3.- ∢BAD ≅ ∢ DAC	Porque AD es bisectriz del ∢ A.
4.- ΔABD ≅ Δ ACD	Por el postulado LAL
5.- ∢B ≅ ∢ C	Por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

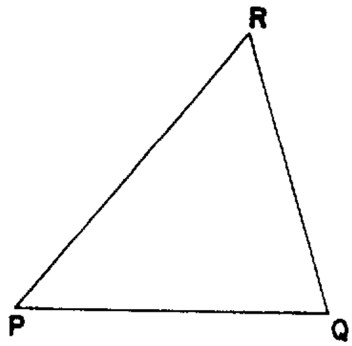


EJERCICIOS:

a) Con tu regla y transportador mide, los lados y ángulos de los siguientes triángulos.



ANGULO	LADO OPUESTO AL ANGULO
∢ A = __________	$\overline{BC}$ = __________
∢ B = __________	$\overline{AC}$ = __________
∢ C = __________	$\overline{AB}$ = __________



ANGULO	LADO OPUESTO AL ANGULO
$\measuredangle P$ = ________________	$\overline{RQ}$ = ________________
$\measuredangle Q$ = ________________	$\overline{RP}$ = ________________
$\measuredangle R$ = ________________	$\overline{PQ}$ = ________________

b) Contesta las siguientes preguntas.

¿Cuál es el ángulo mayor del triángulo ABC? ____________________.

¿Cuál es el lado mayor del triángulo ABC? ____________________.

¿Cuál es el ángulo mayor del triángulo PQR? ____________________.

¿Cuál es el lado mayor del triángulo PQR? ____________________.

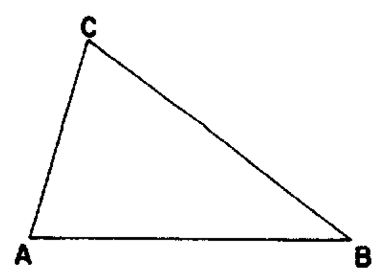
De acuerdo a lo observado en los ejercicios anteriores, podemos enunciar el siguiente teorema.

> TEOREMA: En cualquier triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

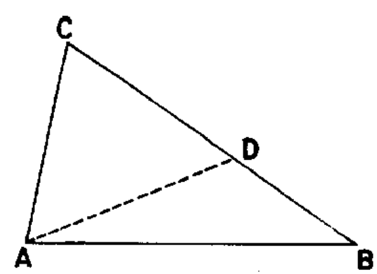
A continuación, te presentamos la demostración de este teorema:

HIPOTESIS: En el triángulo ABC el lado $\overline{BC}$ es mayor que el lado $\overline{AC}$.

TESIS O CONCLUSION: $\measuredangle BAC > \measuredangle ABC$

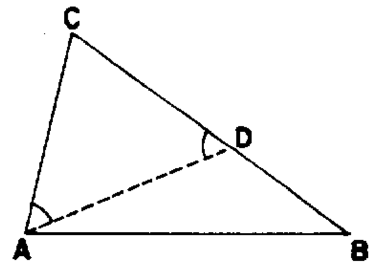


Se elige un punto D sobre $\overline{BC}$ de tal manera que $AC \cong CD$ y se traza AD.
El triángulo ACD es isósceles.

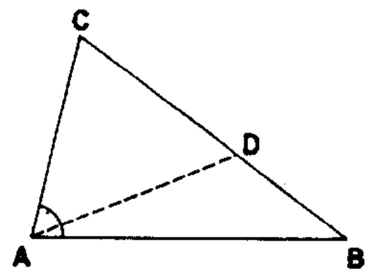


DEMOSTRACION

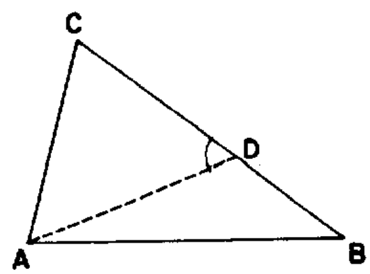
AFIRMACION	RAZONES
1.- ∢CAD = ∢ADC	Son ángulos congruentes - de un triángulo isósceles.



2.- ∢BAC = ∢CAD + ∢BAD	Por construcción.



3.- ∢BAC > ∢ ADC	El todo es mayor que cual quiera de sus partes.
4.- ∢BAC > ∢ ADC	En el paso 3 sustituimos el ∢CAD por el ∢ADC.
5.- El ∢ADC es un ángulo exterior del triángulo ABD.	Por construcción.

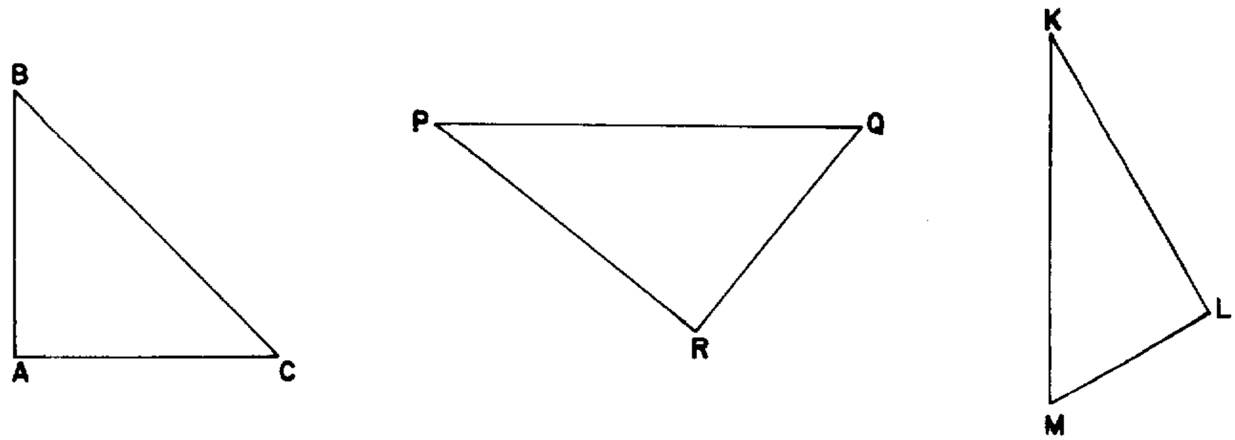


6.- ∢ADC = ∢DAB + ∢ABC	El ángulo exterior del -- triángulo es igual a la - suma de los dos ángulos - interiores no adyacentes- a él.
7.- ∢ADC > ∢ ABC	El todo es mayor que cual quiera de sus partes.
8.- ∢BAC > ∢ ABC	Aplicando la propiedad -- transitiva en 3 y 7.

TEOREMA DE PITAGORAS.

En secciones anteriores, al estudiar la clasificación de los triángulos, establecimos que de acuerdo a la medida de sus ángulos, éstos se clasifican en: Triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos. Señalamos que los triángulos rectángulos son aquellos que tienen un ángulo recto. Es decir, un ángulo cuya medida es de 90 grados.

Los siguientes triángulos son ejemplos de triángulos rectángulos:



EJERCICIO:

Verifica que los triángulos anteriores son rectángulos.

También se estableció previamente: que los ángulos de un triángulo rectángulo que no sean el recto, son agudos. Es decir: miden menos de 90°.

De igual manera se estableció que en un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.

Por lo tanto, en cualquier triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto es el lado mayor. Llamaremos a este lado, HIPOTENUSA y a los menores CATETOS.

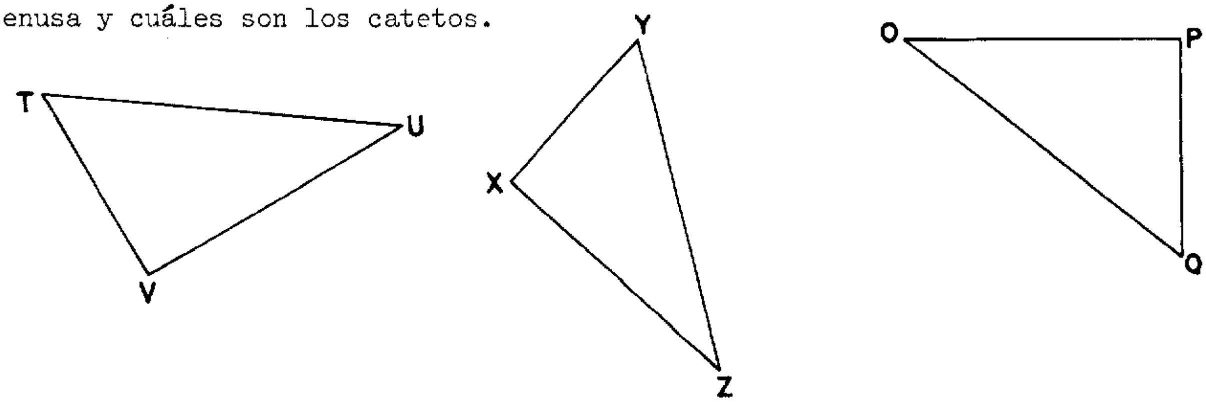
En los triángulos anteriores:

La hipotenusa es: $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{KM}$ respectivamente, y los catetos son:

$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$, $\overline{KL}$ y $\overline{LM}$, respectivamente.

EJERCICIO:

Para cada uno de los siguientes triángulos rectángulos, señala cuál es la hipotenusa y cuáles son los catetos.



HIPOTENUSA: ________ HIPOTENUSA: ________ HIPOTENUSA: ________

CATETO: ________ CATETO: ________ CATETO: ________

CATETO: ________ CATETO: ________ CATETO: ________

Una relación muy importante en matemáticas corresponde a la relación que guardan las medidas de la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo. Este resultado ya era conocido por los griegos en la antigüedad y hoy en día es conocido como "TEOREMA DE PITAGORAS", el cual establece que:

"En cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

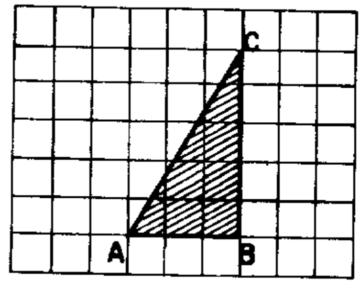
Pitágoras de Samos

Incluido entre los siete sabios de Grecia, es un ejemplo del gran auge intelectual del mundo griego. Pitágoras fue originario de la isla de Samos. Su nacimiento se ha situado aproximadamente en el año 582 antes de nuestra era.

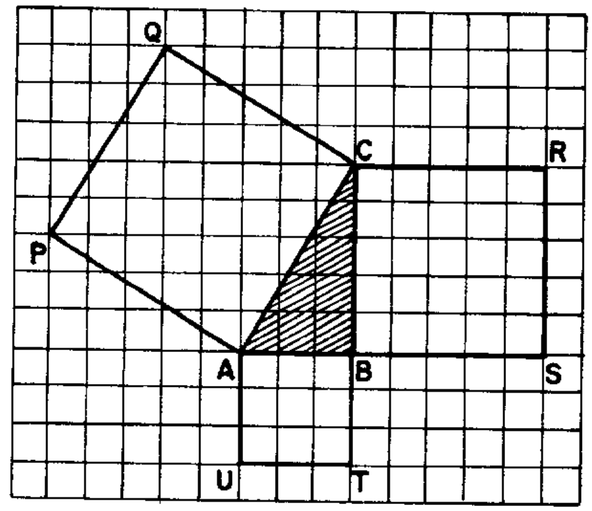
Debe su gran renombre, entre otras cosas, a la proposición que afirma que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. Esta proposición se conoce como teorema de Pitágoras.

Con objeto de aclarar esta propiedad analicemos lo siguiente:

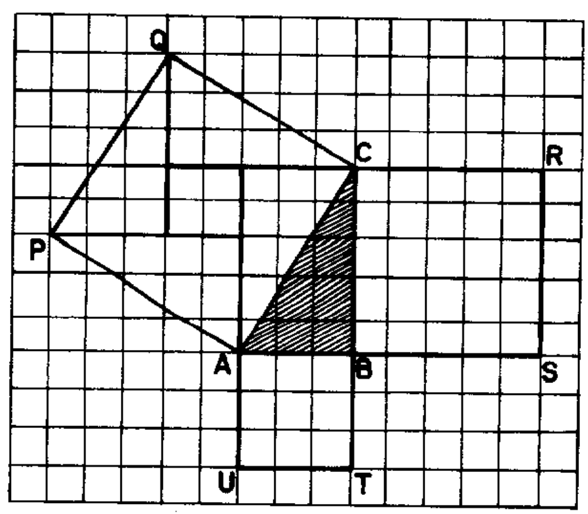
1.- Consideremos al triángulo rectán gulo A B C.



2.- Construyamos cuadrados sobre cada lado del triángulo.



3.- Dividamos al cuadrado APQC en 4 triángulos congruentes al triángu lo ABC y en un cuadrado central.



4.- Observemos que:

El área del triángulo ABC es: 7.5
El área del cuadrado ABTU es: 9
El área del cuadrado CRSB es: 25
El área del cuadrado PQCA es: $34 = \underbrace{7.5 + 7.5 + 7.5 + 7.5}_{\text{4 triángulos}} + \underbrace{4}_{\text{un cuadrado central}}$

5.- Con los datos anteriores, construyamos la siguiente tabla:

Figura	Area de C R S B	Area de A B T U	Area de P Q C A
A	25	9	34

6.- Para las figuras B,C y D siguientes, obtengamos las áreas y en forma similar a como lo hicimos para la figura A. Completemos con los datos obtenidos la tabla correspondiente:

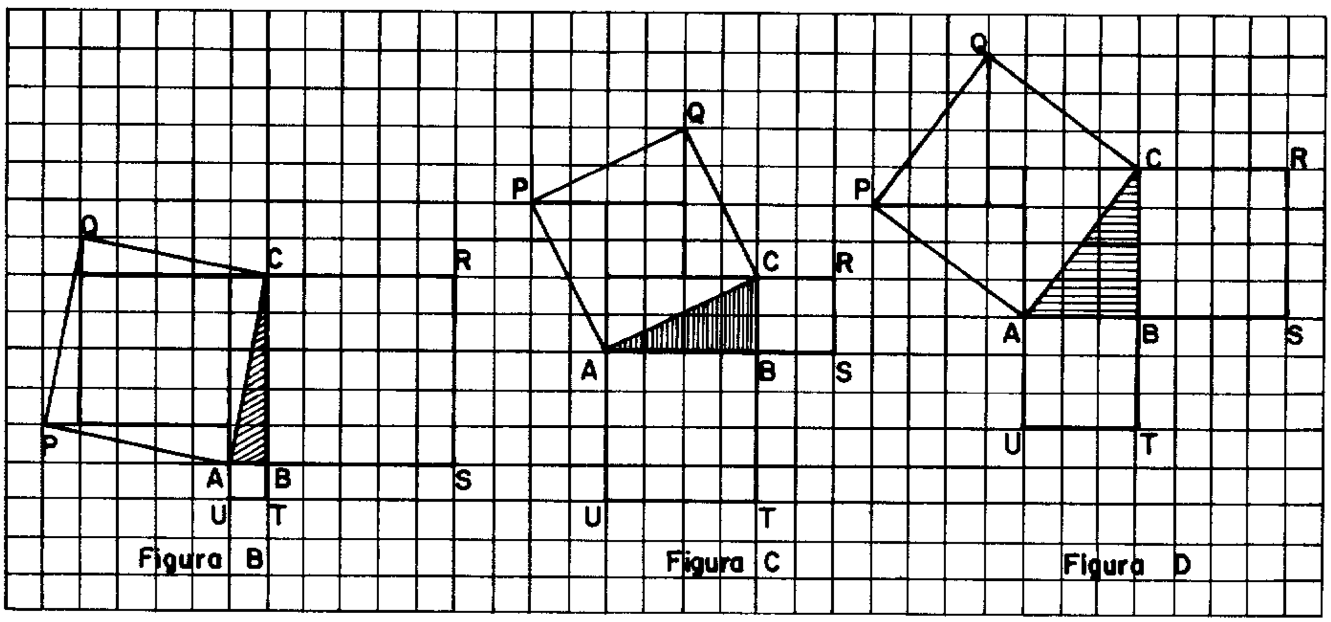


Figura	Area de C R S B	Area de A B T U	Area de P Q C A
A	25	9	34
B	25	1	26
C	4	16	20
D	16	9	25

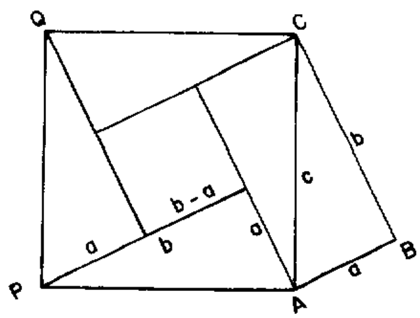
7.- Si analizamos la tabla anterior podemos concluir que:

Area de PQCA = Area de CRSB + Area de ABTU

Es decir:

"El área del cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos".

DEMOSTRACION.



De la figura anterior tenemos que:

1.- El triángulo ABC es rectángulo, a y b son las medidas de sus catetos y c la medida de su hipotenusa.

2.- Area de P Q C A = c^2

3.- Area de P Q C A = $4 \left(\frac{ab}{2} \right) + (b - a)^2$

Area de los 4 triángulos contenidos en P Q C A. | Area del cuadrado.

Entonces tenemos que:

$$c^2 = 4 \left(\frac{ab}{2} \right) + (b - a)^2$$

$$c^2 = 2ab + (b - a)^2$$

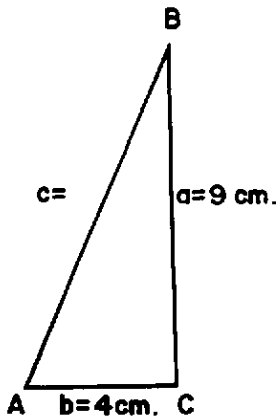
$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

APLICACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS.

La relación que se establece entre los lados de un triángulo rectángulo representada con la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ (En donde, a y b representan las medidas de los catetos y c la medida de la hipotenusa) nos permite, dada la medida de dos de los lados de un triángulo obtener la medida del otro lado.

Ejemplos:



En el triángulo A B C conocemos las medidas de los catetos y desconocemos la medida de la hipotenusa. Para encontrar la medida de la hipotenusa procedemos de la siguiente forma.

En la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ sustituimos los valores conocidos.

$$c^2 = (9)^2 + (4)^2$$
$$c^2 = 81 + 16$$

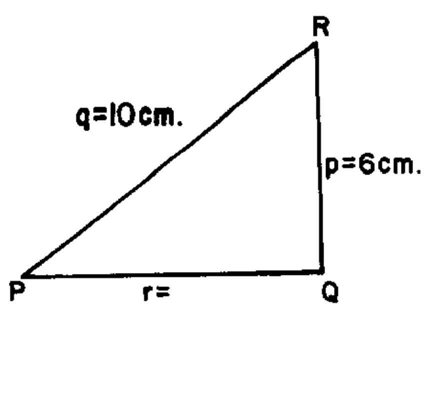
De esta forma nuestro problema se reduce a resolver la ecuación de segundo grado obtenida a partir de la sustitución de los valores conocidos.

$$c^2 = 97$$
$$c = \pm\sqrt{97}$$
$$c = 9.84 \text{ cm.}$$
$$c = -9.84 \text{ cm.}$$

Al resolver la ecuación obtenemos dos valores para c; pero únicamente consideramos el valor positivo, ya que no tiene sentido hablar de medidas negativas para los lados de un triángulo.

Otros ejemplos de la aplicación del teorema de Pitágoras son los siguientes:

a) Encontrar la medida del cateto desconocido en el triángulo P Q R.



Tenemos que:

$q^2 = p^2 + r^2$ (Teorema de Pitágoras)

Sustituimos los valores conocidos

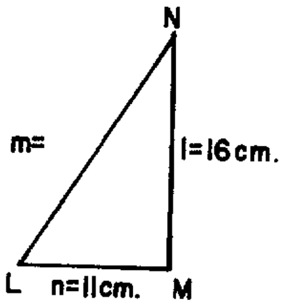
$$10^2 = 6^2 + r^2$$

Despejamos la incógnita y resolvemos la ecuación.

$$10^2 - 6^2 = r^2$$
$$r^2 = 10^2 - 6^2$$
$$r^2 = 100 - 36$$
$$r^2 = 64$$

$\boxed{r = 8 \text{ cm.}}$ Medida del cateto desconocido.

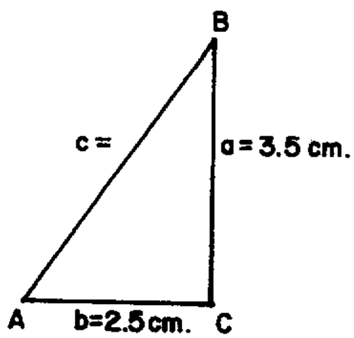
b) Obtener la medida de la hipotenusa del triángulo L M N.

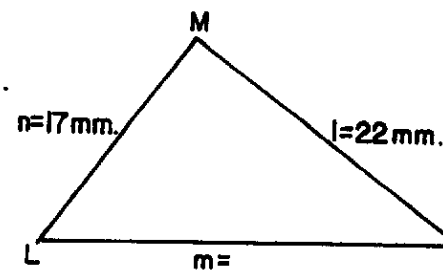


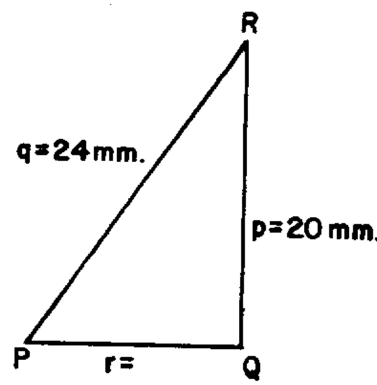
$$m^2 = l^2 + n^2 \quad \text{Teorema de Pitágoras.}$$
$$m^2 = (16)^2 + (11)^2$$
$$m^2 = 256 + 121$$
$$m^2 = 377$$
$$m = \sqrt{377}$$
$$m \doteq 19.41 \text{ cm.}$$

EJERCICIOS:

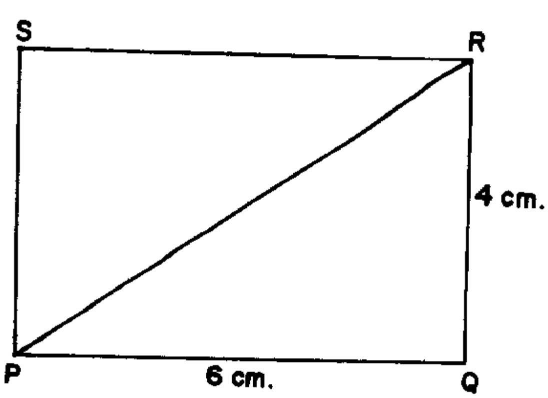
a) Obtén el valor del lado desconocido de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.



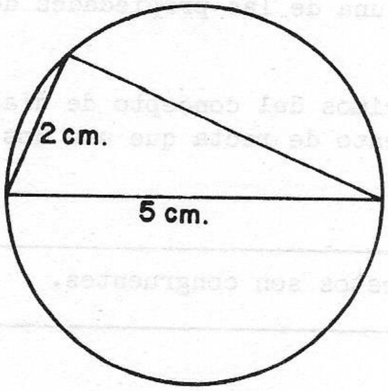




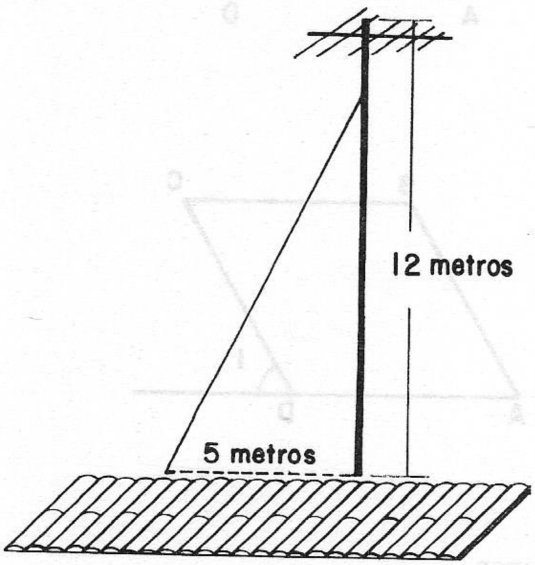
b) Utiliza tus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras para resolver los siguientes problemas.



¿Cuántos metros mide la diagonal $\overline{PR}$ del rectángulo P Q R S?



En una circunferencia que mide 5 cm. de diámetro, se inscribe un triángulo rectángulo que tiene un cateto de 2 cm. ¿Cuál es la medida del otro cateto?



Una antena de televisión mide 12 metros de altura ¿Cuántos metros medirá un cable que sujeta la antena a 2 metros de la punta de la antena y queda, en su otro extremo a 5 metros de la base de la misma?

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS.

Nuestros conocimientos acerca de los ángulos formados entre dos rectas paralelas que son cortadas por una transversal y las propiedades de los triángulos que estudiamos en secciones anteriores nos permiten demostrar las siguientes propiedades de los paralelogramos.

1.- En todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.

2.- En todo paralelogramo dos ángulos consecutivos son suplementarios.

3.- En todo paralelogramo sus lados opuestos son congruentes.

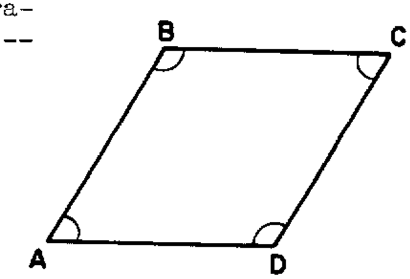
4.- Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en el punto medio de cada una de ellas.

A continuación realizamos la demostración de cada una de las propiedades de los paralelogramos previamente citadas.

Para demostrar algunas de estás propiedades requerimos del concepto de diagonal de un polígono, recuerda que: una diagonal es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

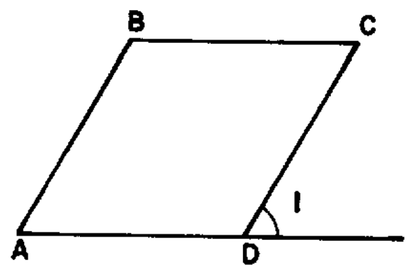
TEOREMA: En todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.

HIPOTESIS: El cuadrilátero A B C D es un paralelogramo, el $\sphericalangle A$ y el $\sphericalangle C$ son opuestos.



CONCLUSION: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$

Prolongamos el lado $\overline{AD}$ para formar el $\sphericalangle 1$.



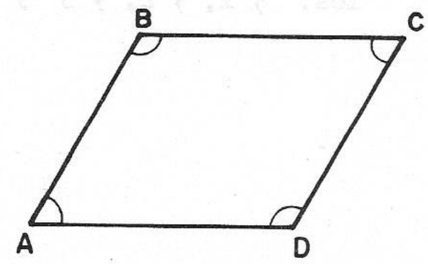
DEMOSTRACION.

AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\sphericalangle A = \sphericalangle 1$	Por ser ángulos correspondientes.
2.- $\sphericalangle 1 = \sphericalangle C$	Por ser ángulos alternos internos.
3.- $\sphericalangle A = \sphericalangle C$	Propiedad transitiva de la igualdad en los pasos 1 y 2.

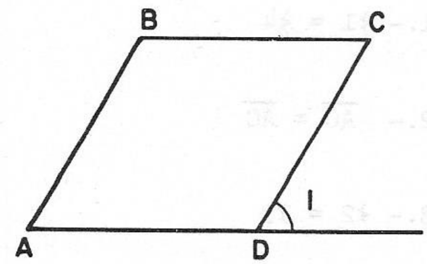
TEOREMA: En todo paralelogramo dos ángulos consecutivos son suplementarios.

HIPOTESIS: El cuadrilátero A B C D es un paralelogramo.
El ∢ C y ∢ D son consecutivos.

CONCLUSION: ∢ C + ∢ D = 180°



Prolongamos el lado $\overline{AD}$ para formar el ∢1.

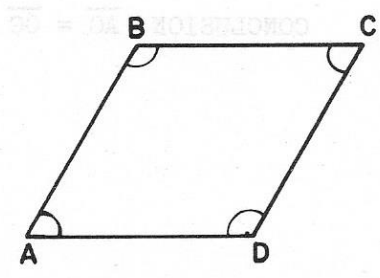


DEMOSTRACION

AFIRMACIONES	RAZONES
1.- ∢1 = ∢C	Por ser ángulos alternos internos.
2.- ∢1 + ∢D = 180°	Por formar un ángulo colineal.
3.- ∢C + ∢D = 180°	Sustituimos el ∢ C por el ∢ 1.

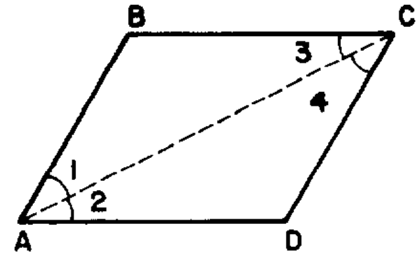
TEOREMA: En todo paralelogramo sus lados opuestos son congruentes.

HIPOTESIS: El cuadrilátero A B C D es un paralelogramo.



CONCLUSIONES: $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{AB} = \overline{DC}$

Trazamos la diagonal $\overline{AC}$, obteniendose los ángulos: $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$.



DEMOSTRACION

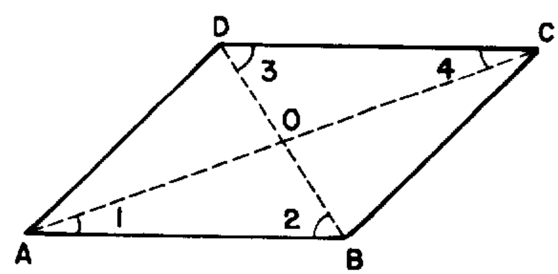
AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$	Por ser ángulos alternos internos.
2.- $\overline{AC} = \overline{AC}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
3.- $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$	Por ser ángulos alternos internos.
4.- $\Delta ABC = \Delta ADC$	Por el postulado A L A.
5.- $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{AB} = \overline{DC}$	Son partes correspondientes de triángulos congruentes.

TEOREMA: Las diagonales de un paralelogramo se intersectan en el punto medio de cada una de ellas.

HIPOTESIS: El cuadrilátero A B C D es un paralelogramo.

$\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ son sus diagonales y se cortan en O.

CONCLUSION: $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{DO} = \overline{OB}$

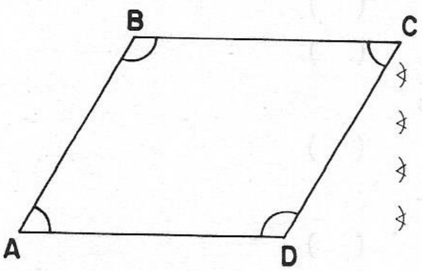


DEMOSTRACION

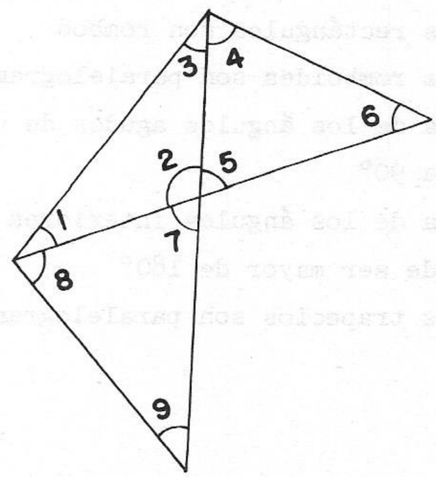
AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$	Los ángulos alternos internos son congruentes.
2.- $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$	Los ángulos alternos internos son congruentes.
3.- $\overline{AB} = \overline{CD}$	Por el teorema anterior.
4.- $\triangle COD = \triangle AOD$	Postulado A L A.
5.- $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{DO} = \overline{OB}$	Son partes correspondientes de triángulos congruente.

EJERCICIOS:

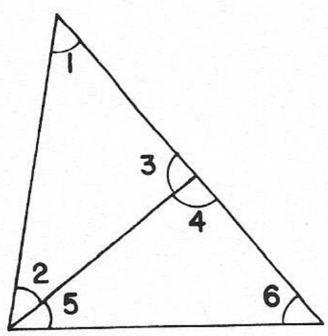
a) Determina la medida de los ángulos señalados en cada una de las figuras que aparecen a continuación.



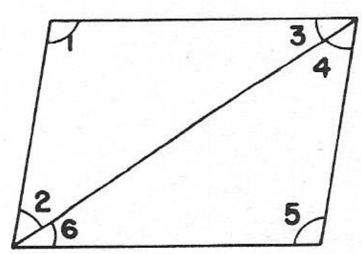
$\measuredangle$ A = 60°
$\measuredangle$ B = ____
$\measuredangle$ C = ____
$\measuredangle$ D = ____



$\measuredangle$ 1 = 33°
$\measuredangle$ 2 = ____
$\measuredangle$ 3 = 35°
$\measuredangle$ 4 = ____
$\measuredangle$ 5 = ____
$\measuredangle$ 6 = 44°
$\measuredangle$ 7 = ____
$\measuredangle$ 8 = ____
$\measuredangle$ 9 = 43°



$\measuredangle$ 1 = 50°
$\measuredangle$ 2 = ____
$\measuredangle$ 3 = 88°
$\measuredangle$ 4 = ____
$\measuredangle$ 5 = ____
$\measuredangle$ 6 = 48°



$\measuredangle$ 1 = 100°
$\measuredangle$ 2 = ____
$\measuredangle$ 3 = ____
$\measuredangle$ 4 = ____
$\measuredangle$ 5 = ____
$\measuredangle$ 6 = 33°

b) Las dimensiones de una hoja tamaño carta son de 21.7 y 28 cm., ¿Cuál es la -- longitud del mayor segmento de recta que puede trazarse dentro de la hoja?.

c) De las siguientes ternas de medidas subraya aquellas con las que sea posible construir un triángulo.

1) 4,7,9	6) 3,4,5
2) 3,2,5	7) 6,4,10
3) 4,6,11	8) 12,11,13
4) 2,5,10	9) 12,17,3
5) 7,3,2,8,9,1	10) 4,6,11

d) Califica las siguientes proposiciones:

1.- Todo rectángulo es un trapecio ( )

2.- Todo rombo es un cuadrado ( )

3.- Todo cuadrado es un rectángulo ( )

4.- Todo paralelogramo es un cuadrado ( )

5.- Las diagonales de un rectángulo se bisecan ( )

6.- Algunos rectángulos son rombos ( )

7.- Algunos romboides son paralelogramos ( )

8.- La suma de los ángulos agudos de un triángulo es igual a 90° ( )

9.- La suma de los ángulos interiores de un triángulo puede ser mayor de 180° ( )

10.- Algunos trapecios son paralelogramos. ( )

unidad

5

círculo

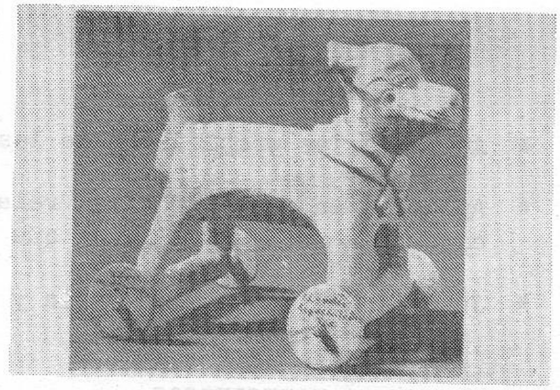
COMO CÍRCULO SOY UN OBJETO FELIZ;
CONSIDERA QUE LA DICHOSA PERPENDICULAR
QUE SE YERGUE EN EL BESO DE TANGENCIA
HA DE ALCANZAR MI CENTRO, MI AVATAR
SOY HERMOSO, Y NO OBSTANTE
BASTAN 3 PUNTOS PARA DETERMINARME.

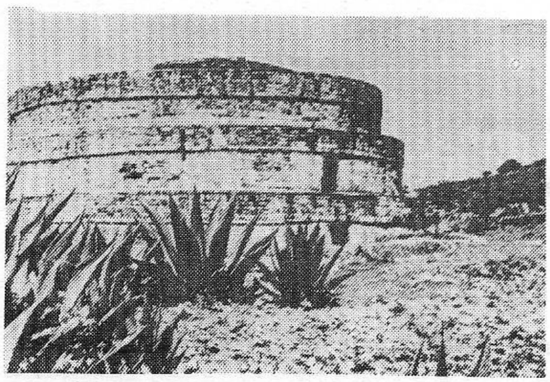
CHRISTOPHER MORLEY

I N T R O D U C C I O N

Existen vestigios que muestran la habilidad humana para entender las formas físicas de la naturaleza. Tal vez las observaciones del centro de algunas flores, los bordes de los nidos de aves, la periferia del sol, la luna, las ondas circulares formadas por un guijarro en el agua, condujeron al hombre primitivo hacia las ideas de círculo y circunferencia.

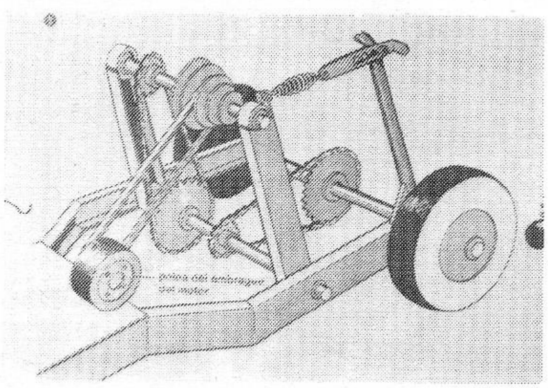
Indudablemente, un cambio determinante en la historia del hombre fue la invención y uso de la rueda. Se cree que ésta, fue inventada en Asia hace unos 10000 años. Lo cierto es que las ruedas más antiguas se descubrieron en Mesopotania en 1927 y pertenecen a un carro con una edad aproximada de 5500 años.

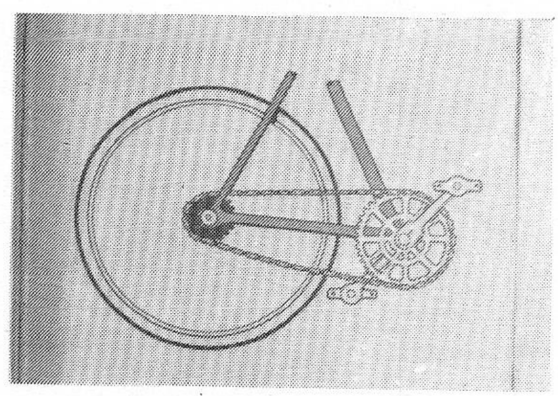




En México, antes de la conquista la forma circular se usó en el modelado de vasijas; en estructuras, como el "Calendario Azteca"; en la forma de pirámides como el monumento No. 3 de Tecaxix-Calixtlahuaca y el de Malinalco, ambos pertenecientes a zonas arqueológicas del Estado de México.

Actualmente, la Tecnología está íntimamente relacionada con la aplicación de las formas circulares. La industría no puede prescindir de las ruedas y sus similares, los engranes, las poleas y los ejes.





En esta unidad nos referimos al círculo, la circunferencia y algunas de sus propiedades; las relaciones entre rectas, ángulos y circunferencias, así como algunas justificaciones de trazos con regla y compás.

OBJETIVOS PARTICULARE:

* Aplicará las propiedades de las rectas y segmentos en la circunferencia.

* Aplicará en ejercicios las relaciones entre los diferentes ángulos en la -- circunferencia y los arcos que subtienden.

* Justificará trazos con regla y compás.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Aplicará algunas propiedades del radio y diámetro.

- Aplicará algunas propiedades de la tangente y la secante.

- Identificará los principales ángulos en el círculo central, inscrito y semi inscrito.

- Aplicará el postulado "un ángulo central está medido por el arco que interceptan sus lados".

- Aplicará el teorema "Un ángulo inscrito está medido por la mitad del arco - que interceptan sus lados".

- Definirá el concepto de lugar geométrico.

- Justificará algunos trazos con regla y compás.

CIRCUNFERENCIA Y RADIO

Si utilizamos una tira de cartón con dos perforaciones (fig. 1.a) y hacemos girar la tira, usando como centro de rotación la perforación (O), y marcamos la trayectoria de la perforación (P), la figura obtenida es una circunferencia (fig. 1.b).

En general, en un plano, diremos que es posible dibujar una circunferencia dado un punto fijo y una distancia.

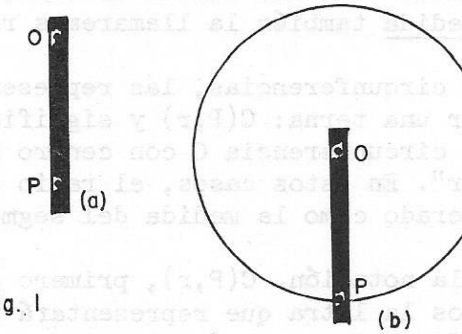


Fig. I

El instrumento que emplearemos para trazar circunferencias será el compás. Este lo usaremos en dos formas:

1) Para medir un segmento, y
2) Con la medida del segmento, trazaremos la circunferencia.

Ejemplos:

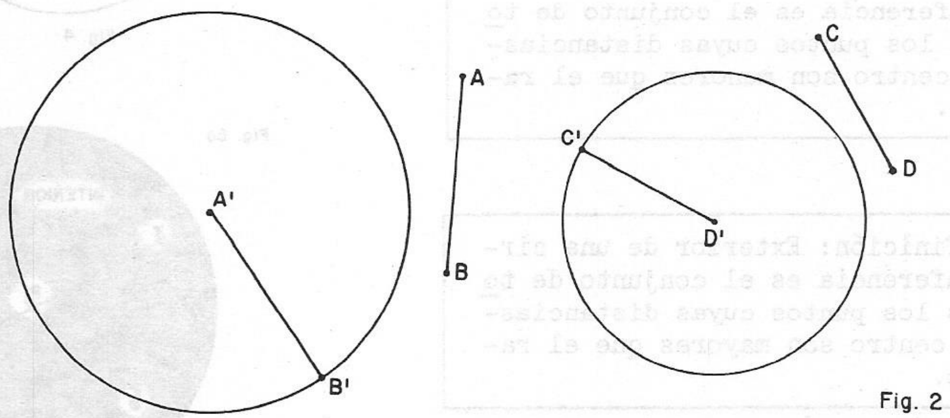
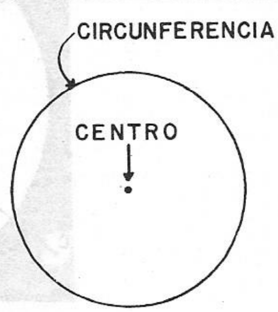


Fig. 2

La circunferencia, la definimos como:

> Definición: Una circunferencia es el conjunto de puntos en el plano, que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.



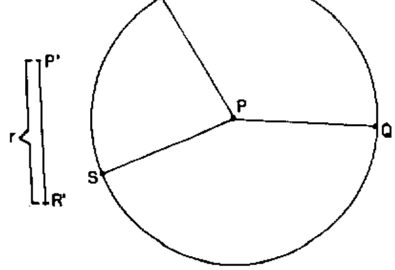
El segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia, se llama: "radio". En una circunferencia, todos los radios tienen la misma medida y a ésta medida también la llamaremos radio; el contexto evitará confusiones.

Las circunferencias, las representamos por una terna: C(P,r) y significa: "La circunferencia C con centro P y radio r". En estos casos, el radio está considerado como la medida del segmento.

En la notación C(P,r), primero escribimos la letra que representará la circunferencia, después el punto que será el centro y por último la medida del segmento que usaremos para trazar la circunferencia.

Una circunferencia, también es una curva cerrada simple (revisa la unidad anterior) y como tal, tiene interior y exterior.

Fig. 3



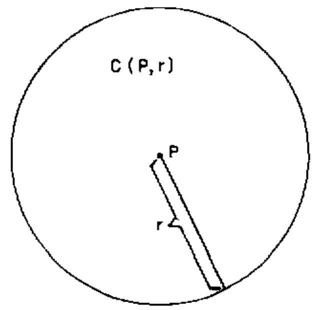
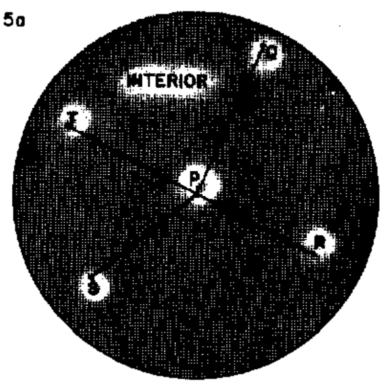


Fig. 4

Definición: Interior de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos cuyas distancias al centro son menores que el radio.

Fig. 5a



Definición: Exterior de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos cuyas distancias al centro son mayores que el radio.

Definición: Círculo es la unión de una circunferencia con su interior.

Fig. 5b

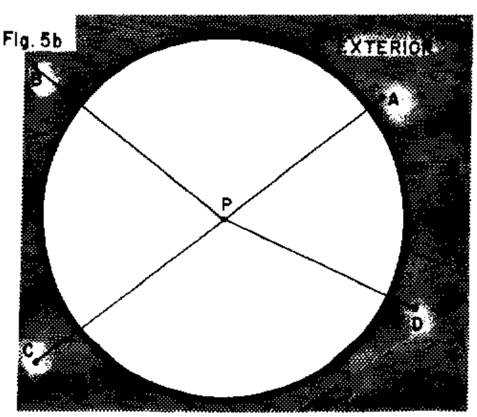
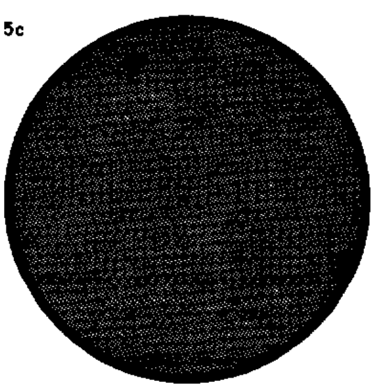


Fig. 5c



EJERCICIOS:

Observa los correspondientes dibujos y contesta las preguntas.

a) En la figura 6, de los puntos indicados:

1.- ¿Cuáles son los puntos que están en el interior de C(P,r)?

2.- ¿Cuáles son los puntos que están en el exterior de C(P,r)?

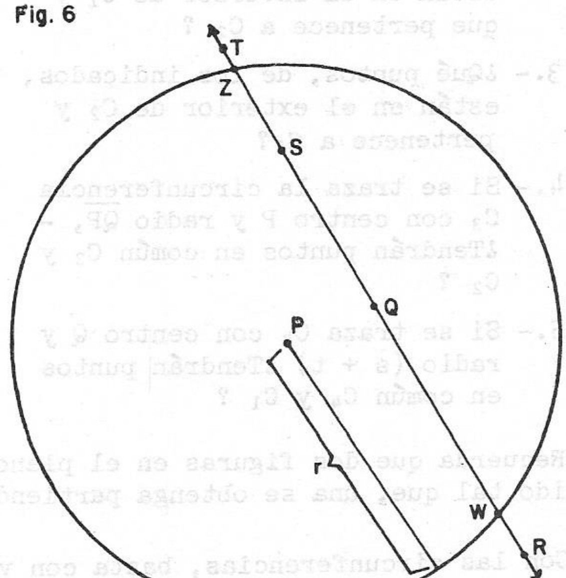
3.- ¿Cuáles son los puntos que pertenecen a C(P,r)?

4.- ¿Cuáles son los puntos en común entre $\overleftrightarrow{TR}$ y C(P,r)?

5.- Indica si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

$r > m\,\overline{PR}$	$2r > m\,\overline{ZW}$
$r < m\,\overline{PR}$	$2r < m\,\overline{ZW}$
$r > m\,\overline{PW}$	$m\,\overline{PT} > r$
$r = \overline{PW}$	$m\,\overline{PT} < r$
	$m\,\overline{PT} < 2r$

Fig. 6



b) Emplea la figura 7 para contestar las siguientes preguntas:

1.- ¿Qué puntos de $\overleftrightarrow{TS}$ están en el exterior de la circunferencia C(P,r)?

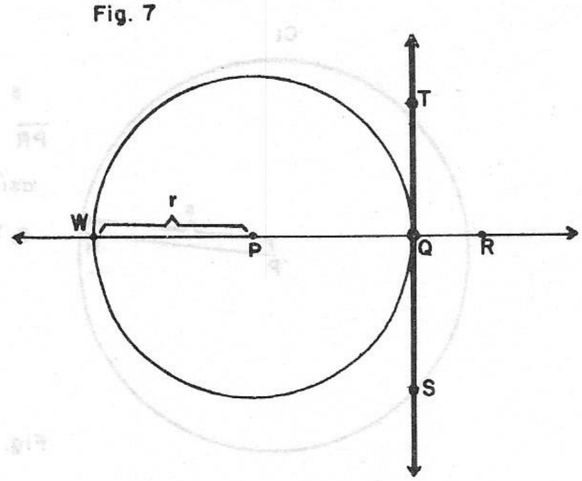
2.- ¿Qué puntos tiene en común la circunferencia y $\overleftrightarrow{TS}$?

3.- $\overleftrightarrow{TS}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{QR}$.
¿La distancia $\overline{PQ}$ es mayor, menor o igual que la distancia $\overline{PT}$?

4.- ¿La distancia $\overline{PT}$ es mayor, menor o igual que r?

5.- ¿$\overline{WQ}$ es mayor, menor o igual a 2r?

Fig. 7



c) Utiliza la figura 8 para responder lo siguiente:

1.- ¿Cuáles son los puntos que -- tienen en común $C_1(P,s)$ y $C_2(Q,t)$?

2.- ¿Qué puntos, de los indicados, están en el interior de C_1 y que pertenece a C_2 ?

3.- ¿Qué puntos, de los indicados, están en el exterior de C_2 y pertenece a C_1?

4.- Si se traza la circunferencia C_3 con centro P y radio $\overline{QP}$, - ¿Tendrán puntos en común C_3 y C_2 ?

5.- Si se traza C_4 con centro Q y radio (s + t) ¿Tendrán puntos en común C_4 y C_1 ?

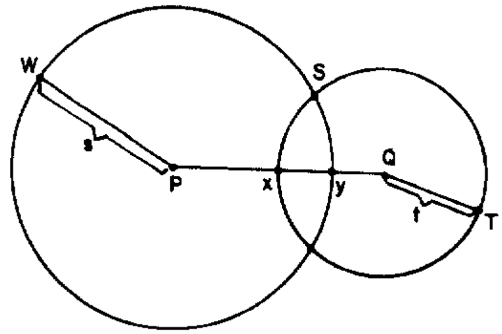


Fig. 8

Recuerda que dos figuras en el plano son congruentes, si existe un movimiento-rígido tal que, una se obtenga partiendo de la otra.

Con las circunferencias, basta con verificar que tengan radios (como segmentos) congruentes, para asegurar la congruencia entre ellas, esto es, dadas dos circunferencias $C_1(P,r)$ y $C_2(Q,s)$ es suficiente que: r = 5 para que $C_1 \cong C_2$.

En la figura 9, las circunferencias son congruentes.

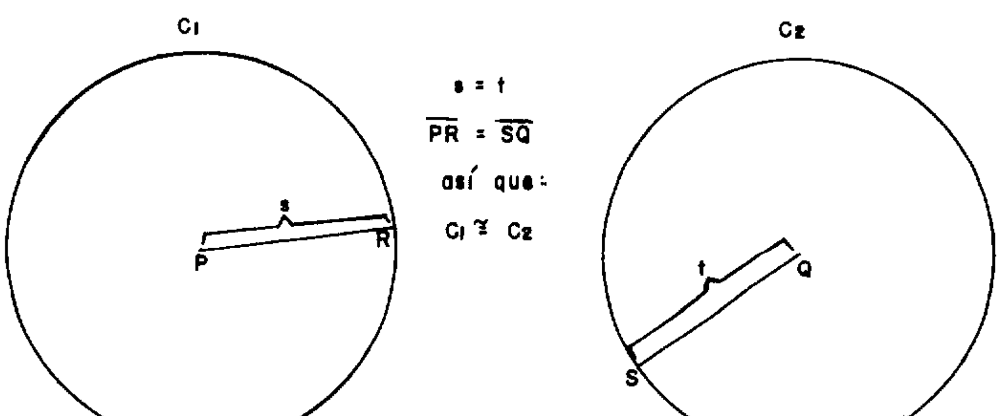


Fig. 9

CUERDA.

Definición: Si un segmento tiene como puntos extremos dos puntos distintos de una misma circunferencia, entonces, el segmento se llama cuerda.

Ejemplos de cuerdas.

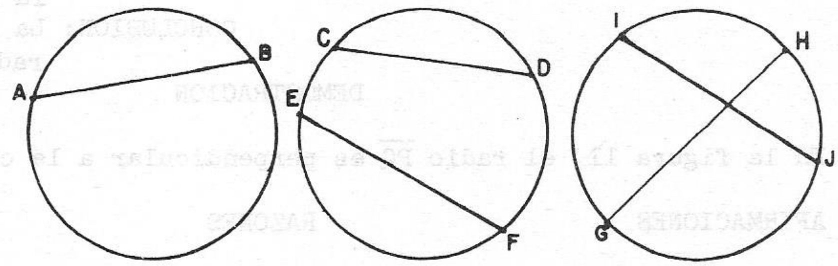
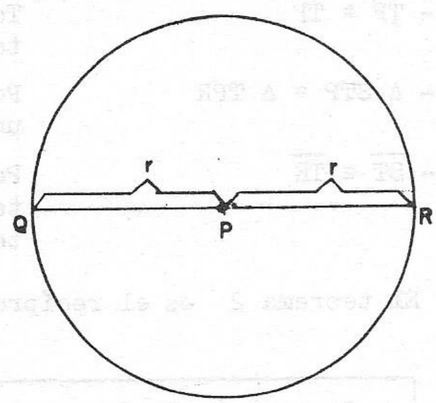


Fig. 10

Definición: Si una cuerda contiene al centro de la circunferencia, entonces, se llama diámetro.

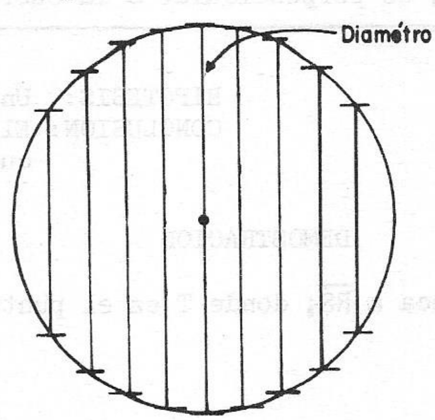
El diámetro tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

1.- Su longitud es igual a dos radios.



$$2\,r = m\,\overline{QR}$$

2.- Es la cuerda que tiene longitud máxima.



ALGUNOS TEOREMAS ACERCA DE LAS CUERDAS.

Teorema 1. En una misma circunferencia, el radio perpendicular a una -- cuerda, biseca la cuerda.

HIPOTESIS: El radio es perpendicular a -- la cuerda.
CONCLUSION: La cuerda es bisecada por el radio.

DEMOSTRACION

En la figura 11, el radio $\overline{PQ}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{SR}$.

AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\overline{PR} \cong \overline{PS}$	Son radios de la misma circunferencia.
2.- El Δ SPR es isósceles.	Definición de Δ isósceles.
3.- $\measuredangle$ TPR $\cong$ $\measuredangle$ TPS	$\overline{QP}$ es perpendicular a $\overline{SR}$ y entonces biseca al ángulo SFQ.
4.- $\overline{TP} \cong \overline{TP}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
5.- Δ STP $\cong$ Δ TPR	Por el axioma L A L de la unidad 4.
6.- $\overline{ST} \cong \overline{TR}$	Por ser lados correspondientes en triángulos congruentes.

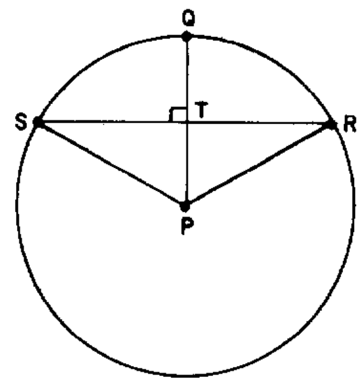


Fig. 11

El teorema 2 es el recíproco del teorema 1, ésto es:

Teorema 2. En una misma circunferencia, si un radio biseca una cuerda, entonces, es perpendicular a la cuerda.

HIPOTESIS: Un radio biseca una cuerda.
CONCLUSION: El radio es perpendicular a la cuerda.

DEMOSTRACION

En la figura 12, $\overline{PQ}$ biseca a $\overline{RS}$; donde T es el punto medio de $\overline{RS}$.

AFIRMACIONES	RAZONES
1.- $\overline{PR} \cong \overline{PS}$	Son radios.
2.- $\overline{PT} \cong \overline{PT}$	Todo segmento es congruente con el mismo.
3.- $\overline{RT} \cong \overline{TS}$	T es el punto medio.
4.- $\triangle PRT \cong \triangle PTS$	Por el axioma L L L de la unidad 4.
5.- $\measuredangle PTS \cong \measuredangle PTR$	Por ser ángulos correspondientes entre triángulos-congruentes.
6.- $m \measuredangle STR = (m \measuredangle STP) + (m \measuredangle PTR)$	Por la suma de ángulos.
7.- $m \measuredangle STR = 180°$	Por ser ángulo llano
8.- $180° = 2\,(m \measuredangle STP)$	Porque $m \measuredangle STP = m \measuredangle PTR$
9.- $90° = m \measuredangle STP$	Dividiendo ambos miembros entre 2.
10.- $90° = m \measuredangle STP = m \measuredangle PTR$	

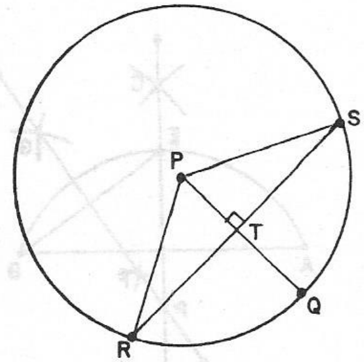


Fig. 12

> Corolario 1. Si una recta es mediatriz de una cuerda, entonces la recta contiene al centro de la circunferencia.

Con estos resultados, dado "un segmento de una circunferencia" (que se llama -- arco), es posible construir la circunferencia completa.

CONSTRUCCION.

Sea el segmento de circunferencia - $\overline{AB}$. fig. 13a.

1.- Trazamos el segmento $\overline{AB}$ (fig. 13b) y dibujemos la mediatriz de $\overline{AB}$. - (recta CD).

2.- Localizamos el punto E que es la intersección de la circunferencia y - la recta DC. Trazamos el segmento - EB y su mediatriz (fig. 13,c) recta FG.

3.-Por el corolario 1, $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ contienen el centro de la circunferencia, así que el centro es el punto P en el que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ se intersectan (fig. 13,c)

Fig. 13a

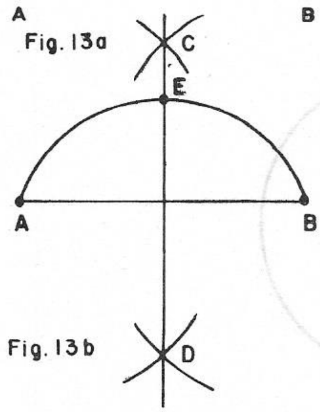


Fig. 13b

4.- Con centro en P y radio $\overline{PE}$ podemos trazar el resto de la circunferencia (fig. 13,d).

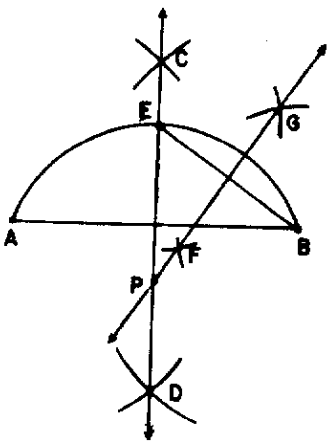


Fig. 13 c

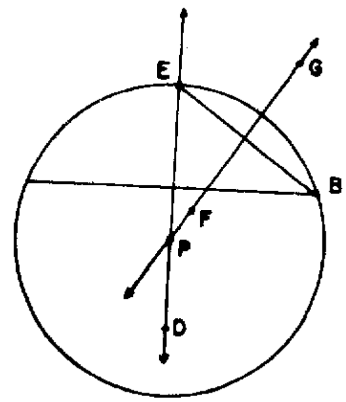
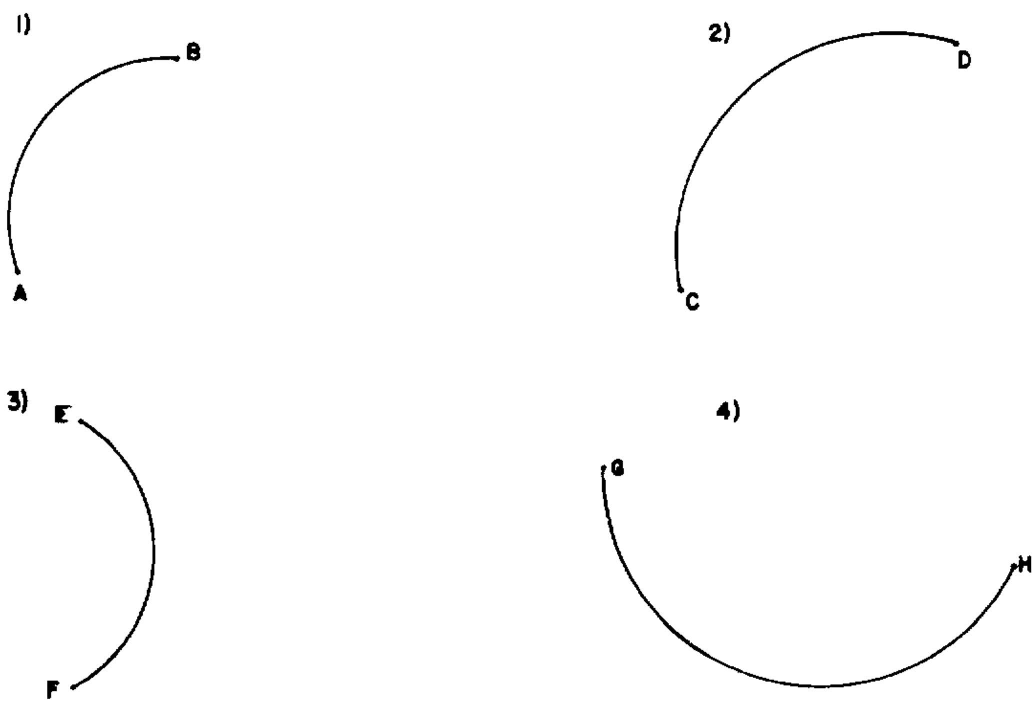


Fig. 13 d

EJERCICIOS:

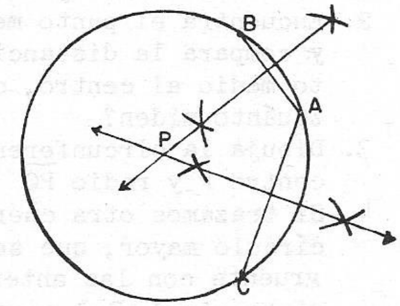
a) Calca en tu cuaderno los siguientes "segmentos de circunferencia" y completa la circunferencia.



b) De hecho, si en un plano se dan tres puntos <u>no</u> colineales, se puede dibujar una circunferencia que los contenga. Observa la figura 14.

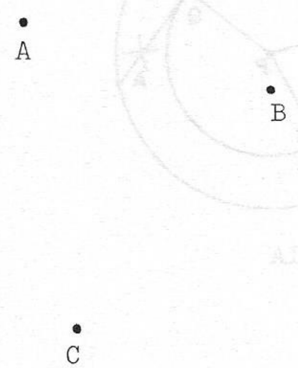
1.- Se dan los puntos A, B y C.
2.- Se trazan los segmentos: $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$
3.- Se trazan las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$
4.- Se localiza el punto P (intersección de las mediatrices).
5.- Con radio $\overline{PB}$ (o $\overline{PA}$ o $\overline{PC}$), se dibuja la circunferencia.

Fig. 14

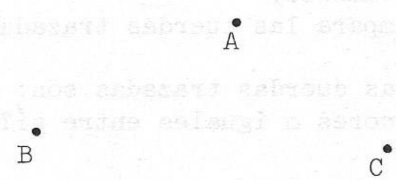


Copia cada terna de puntos en tu cuaderno y dibuja la circunferencia que los contiene.

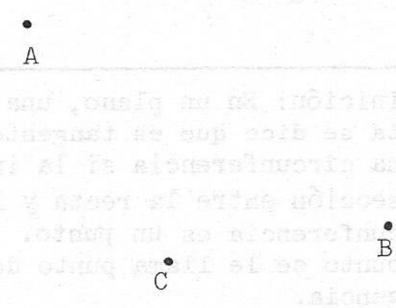
1)



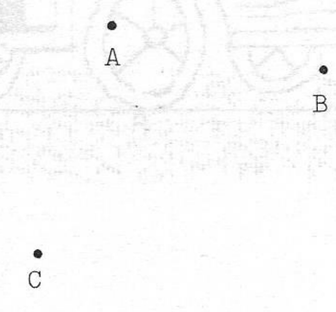
2)



3)



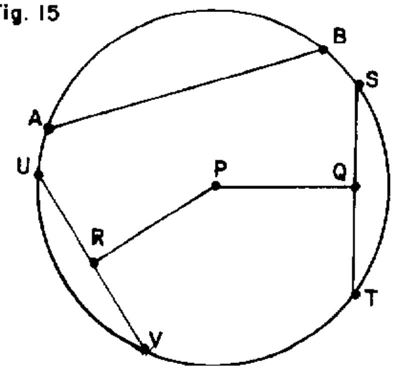
4)



c) Copia la figura 15; con el compás, verifica que $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$.

1. ¿Cuánto miden $\overline{ST}$ y $\overline{UV}$?
2. Encuentra el punto medio de $\overline{AB}$ y compara la distancia del punto medio al centro, con $\overline{PR}$. ¿Cuánto miden?
3. Dibuja la circunferencia con centro P y radio $\overline{PQ}$
4. Si trazamos otra cuerda, en el círculo mayor, que sea congrugruente con las anteriores, la distancia de P al centro de esa cuerda, ¿Será mayor, menor o igual al $\overline{PQ}$?

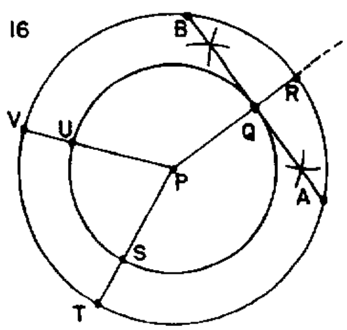
Fig. 15



d) En la figura 16, la cuerda $\overline{AB}$ es perpendicular, al radio $\overline{PR}$

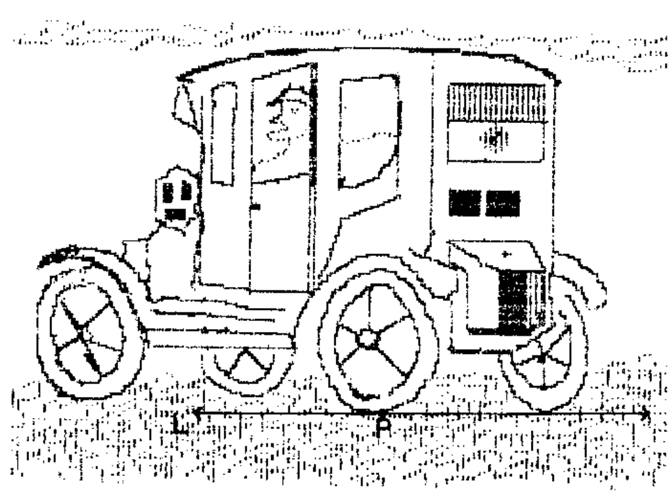
1. Calca el dibujo en tu cuaderno y traza las cuerdas que sean perpendiculares a los radios $\overline{PV}$ y $\overline{PT}$ en los puntos U y S respectivamente.
2. Compara las cuerdas trazadas con $\overline{BA}$
3. ¿Las cuerdas trazadas son: mayores, menores o iguales entre sí?.

Fig. 16



TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

En los dibujos 17.a y 17.b, la recta L se dice que es tangente a las ruedas, y el punto de contacto entre la rueda y la recta se llama punto de tangencia.



> Definición: En un plano, una recta se dice que es tangente a una circunferencia si la intersección entre la recta y la circunferencia es un punto.
> Al punto se le llama punto de tangencia.

En la figura 18, la recta AB es tangente a la circunferencia C(P,r), en el punto Q

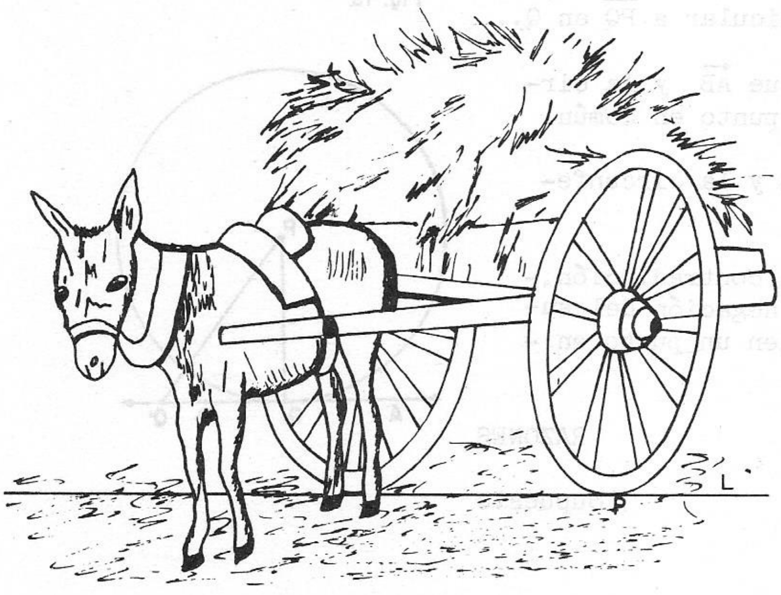
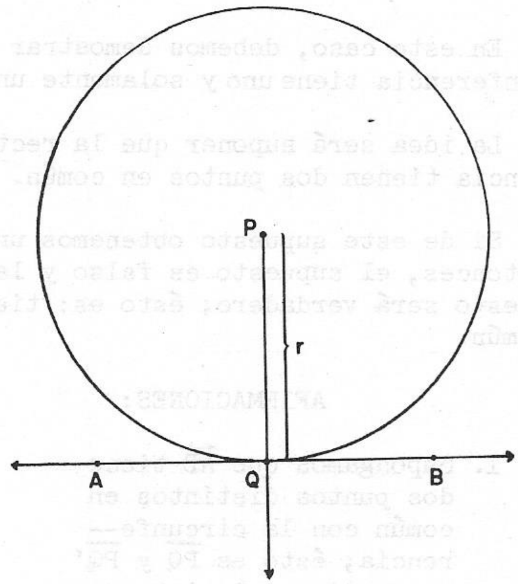


Fig. 17. b

Fig. 18



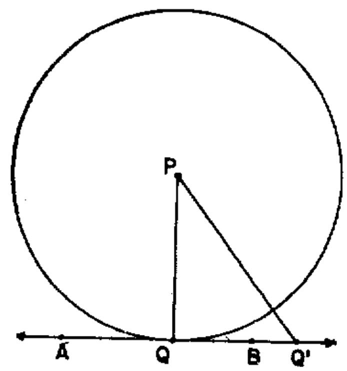
En las demostraciones que hemos realizado hasta ahora, usamos el método llamado "directo", ésto es: con la información y los conocimientos previos, obtenemos la conclusión. En el siguiente teorema, emplearemos el método de "reducción al absurdo"; que consiste básicamente en suponer la falsedad del teorema.

Teorema 3. Si en una circunferencia, una recta es perpendicular a un radio en el punto que se encuentra sobre la circunferencia, entonces, la recta es tangente a la circunferencia.

HIPOTESIS: Una recta es perpendicular a un radio en el punto de la circunferencia.
CONCLUSION: La recta es tangente a la circunferencia.

DEMOSTRACION

Fig. 19



En la figura 19, la $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$ en Q.

En este caso, debemos demostrar que $\overleftrightarrow{AB}$ y la circunferencia tiene uno y solamente un punto en común.

La idea será suponer que la recta y la circunferencia tienen dos puntos en común.

Si de este supuesto obtenemos una contradicción, entonces, el supuesto es falso y la negación del supuesto será verdadero; ésto es: tienen un punto en común.

AFIRMACIONES:	RAZONES
1. Supongamos que $\overleftrightarrow{AB}$ tiene dos puntos distintos en común con la circunferencia; ésto es $\overline{PQ}$ y $\overline{PQ'}$ son radios y la intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ con la circunferencia es Q y Q'	Supuesto
2. El Δ PQQ' es isósceles	Porque PQ $\cong$ PQ' por ser radios.
3. $\angle Q \cong \angle Q'$	Porque son ángulos de la base de un triángulo isósceles.
4. $m \angle Q = 90°$	Porque $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overline{QP}$
5. $m \angle Q = m \angle Q' = 90°$	Por la afirmación 3
6. El Δ PQQ' tiene dos ángulos de 90°	Por las afirmaciones 4 y 5
7. El $\angle P$ mide 0°	Porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°
8. $\overleftrightarrow{QP}$ es la misma recta que $\overleftrightarrow{PQ'}$	Por la afirmación 7

Esta es una contradicción porque si $\overleftrightarrow{QP}$ y $\overleftrightarrow{PQ'}$ son la misma recta, entonces, <u>no</u> existe el Δ PQQ'. Así que la suposición 1 es falsa, entonces la recta AB sólo tiene un punto en común con la circunferencia.

EJERCICIOS.

a) El recíproco del teorema 3 también es verdadero. Esto es:
Teorema: Si una recta es tangente a una circunferencia; entonces, el radio del centro al punto de tangencia es perpendicular a la recta.

1. Calca la figura 20; y con regla y compás, traza las perpendiculares a cada recta en el punto de tangencia.

2. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las rectas perpendiculares que has trazado?

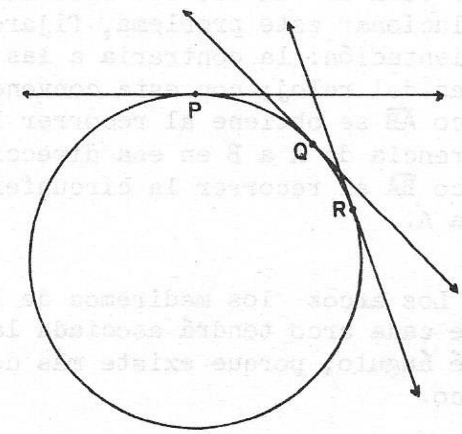


Fig. 20

b) Copia la figura 21. Los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares.

1. Traza las tangentes en los puntos A,B,C y D.

2. Une los puntos de intersección de las rectas tangentes.

3. Traza los segmentos: $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$.

4. Compara el área del polígono formado por los segmentos de recta tangentes al círculo con el polígono ADBC. Esto es; el área del polígono ADBC, ¿Qué tanto es menor que - que el área del polígono mayor?

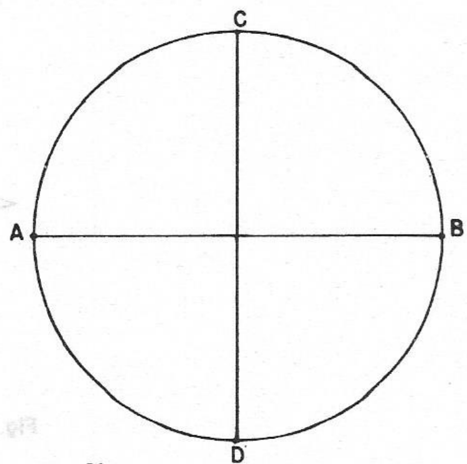


Fig. 21

ANGULO CENTRAL Y SU ARCO

Con anterioridad, hemos usado la palabra "arco" para referirnos al "segmento de una circunferencia", ahora, le daremos un significado preciso al arco de una circunferencia:

Definición: Dos puntos distintos de una circunferencia, dividen a la circunferencia en dos partes, llamadas arcos.

Para determinar un segmento de recta, basta con señalar sus extremos; no así en una circunferencia, en la figura 22 se muestran dos arcos de circunferencia determinados por los puntos A y B. Como se observa, el problema consiste en saber cuál de los dos nos interesa. Para solucionar este problema, fijaremos una orientación: la contraria a las manecillas del reloj; con esta convención, el arco $\widehat{AB}$ se obtiene al recorrer la circunferencia de A a B en esa dirección; y el arco $\widehat{BA}$ al recorrer la circunferencia de B a A.

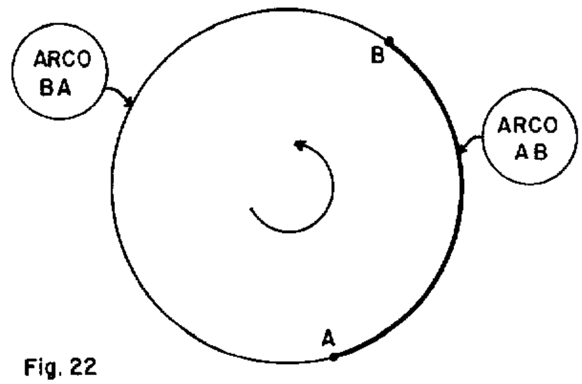


Fig. 22

Los arcos los mediremos de la misma forma que a los ángulos, ésto significa que cada arco tendrá asociada la medida de un ángulo; pero necesitamos especificar qué ángulo, porque existe más de un ángulo cuyos lados contienen los puntos del arco.

Observa la figura 23.

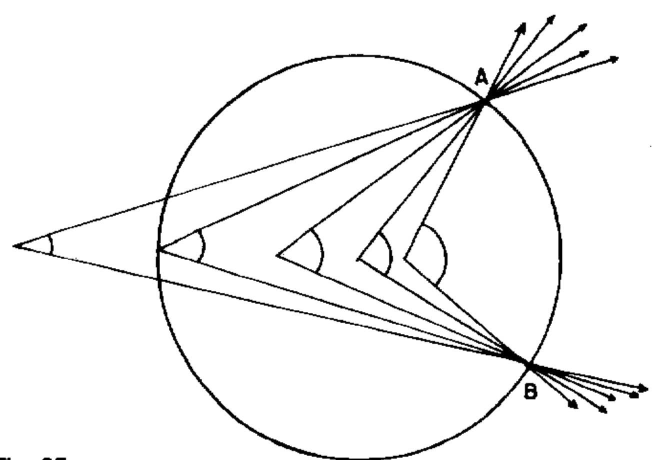


Fig. 23

El ángulo que nos interesa, lo definiremos de la manera siguiente:

Definición:	En una circunferencia, un <u>ángulo central</u>, es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

Diremos que la medida en grados, de un arco, es la misma medida que la del ángulo central cuyos lados contienen los puntos extremos del arco.

Ejemplo:

En la figura 24, el ángulo Q P R mide 90° y es un ángulo central, así que: $\widehat{AB}$, $\widehat{DC}$, $\widehat{EF}$ miden 90°

La congruencia entre los arcos en una circunferencia, la definiremos como sigue:

Definición: En una misma circunferencia, dos arcos son congruentes si tienen la misma medida.

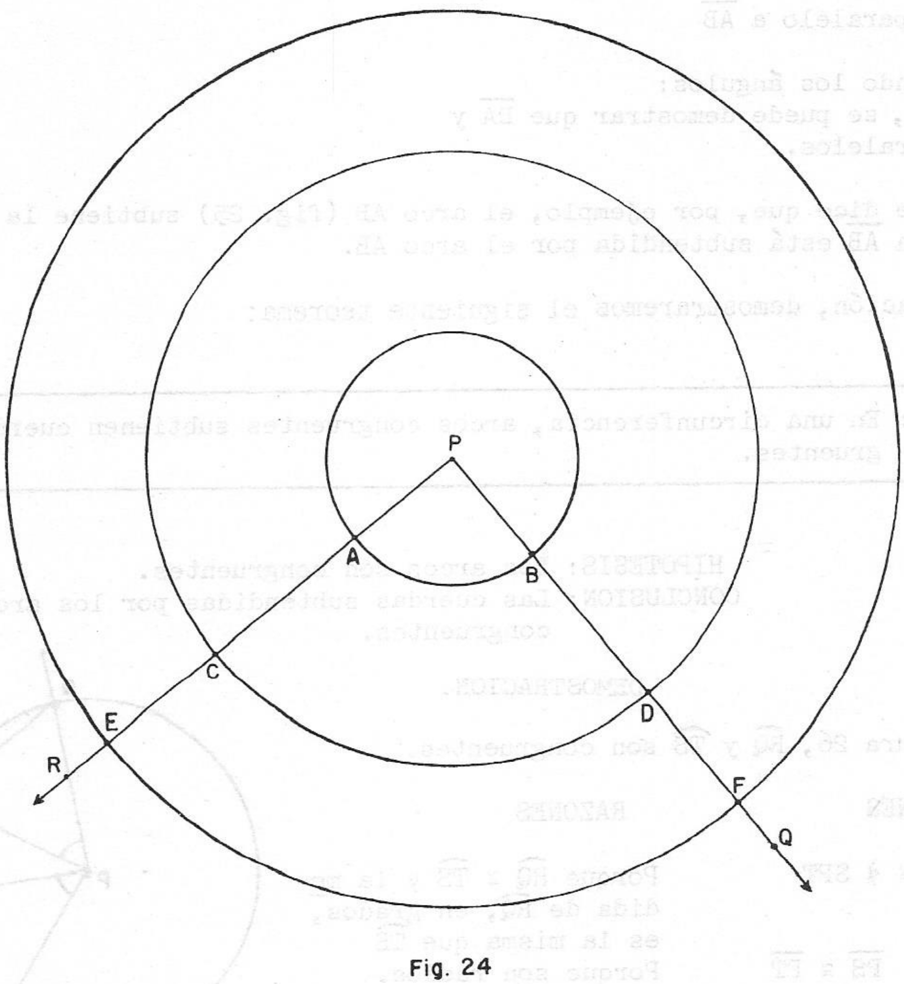


Fig. 24

Usaremos la figura 25, donde $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ son diámetros, para obtener los siguientes resultados:

1. El $\measuredangle$ APB es congruente con el $\measuredangle$ DPC, porque son opuestos por el vértice.
2. De donde:

   $\widehat{AB} \cong \widehat{DC}$
3. La cuerda $\overline{AB}$ es congruente con la cuerda $\overline{DC}$, porque $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PD}$, y $\overline{PC}$ son radios.
4. El $\measuredangle$ PCD $\cong$ $\measuredangle$ BAP porque son ángulos correspondientes entre triángulos congruentes, de donde:
5. $\overline{DC}$ es paralelo a $\overline{AB}$

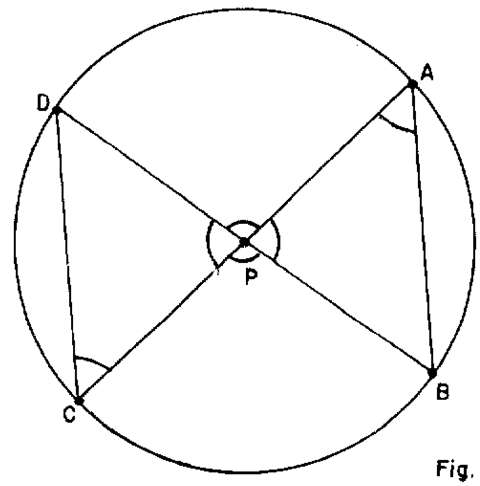


Fig. 25

Considerando los ángulos:
APD y CPB, se puede demostrar que $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ son paralelos.

También se dice que, por ejemplo, el arco AB (fig. 25) subtiene la cuerda $\overline{AB}$ o que la cuerda $\overline{AB}$ está subtendida por el arco AB.

A continuación, demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 4: En una circunferencia, arcos congruentes subtienen cuerdas congruentes.

HIPOTESIS: Los arcos son congruentes.
CONCLUSION: Las cuerdas subtendidas por los arcos, son congruentes.

DEMOSTRACION.

En la figura 26, $\widehat{RQ}$ y $\widehat{TS}$ son congruentes.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. El $\measuredangle$ QPR $\cong$ $\measuredangle$ SPT	Porque $\widehat{RQ} \cong \widehat{TS}$ y la medida de $\widehat{RQ}$, en grados, es la misma que $\widehat{TS}$
2. $\overline{PQ} \cong \overline{PR} \cong \overline{PS} \cong \overline{PT}$	Porque son radios.
3. El Δ PQR $\cong$ Δ PST	Por el axioma LAL de la unidad 4
4. $\overline{QR} \cong \overline{TS}$	Por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

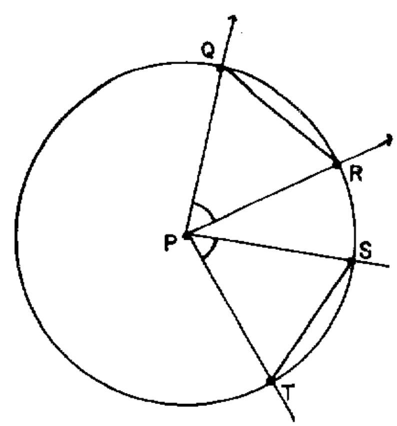


Fig. 26

EJERCICIOS.

a) A continuación, listaremos las afirmaciones de la demostración del recíproco del teorema 5.

Debes completar las razones.

Emplea la figura 27 para completar.

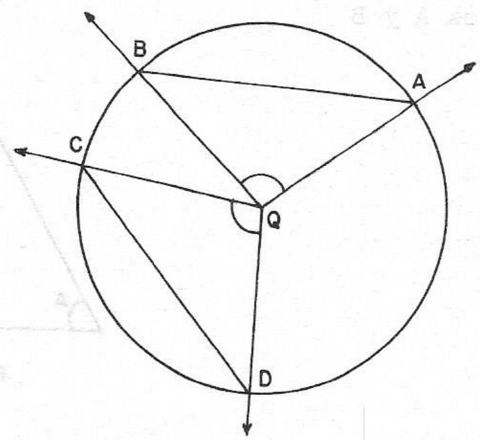
Teorema 5: Cuerdas congruentes están subtendidas por arcos congruentes.

HIPOTESIS: Las cuerdas son congruentes
CONCLUSION: Los arcos que las subtienden son congruentes.

DEMOSTRACION.

AFIRMACIONES	RAZONES.
1. $\overline{QA} \cong \overline{QB} \cong \overline{QC} \cong \overline{QD}$	
2. El Δ BQA $\cong$ Δ CQD	
3. El $\measuredangle$ BQA $\cong$ $\measuredangle$ CQD	
4. AB $\cong$ CD	

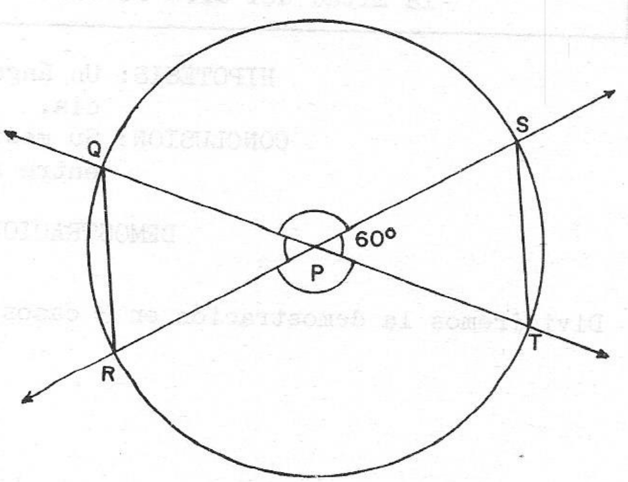
Fig. 27



b) En la figura 28, el ángulo SPT mide 60°. Después de contestar, usa el transportador para verificar tus respuestas.

Fig. 28

1. ¿Cuánto mide el ángulo QPR?
2. ¿Cuánto mide el ángulo RQP?
3. ¿Cuánto mide el ángulo STP?
4. ¿Cuánto mide el ángulo PST?
5. ¿Cuánto mide el ángulo SPQ?
6. ¿Qué ángulo es congruente con $\measuredangle$ RPT?



En la figura 29, los ángulos CAB y FDE, tienen la caracterísitica de tener el vértice en la circunferencia.

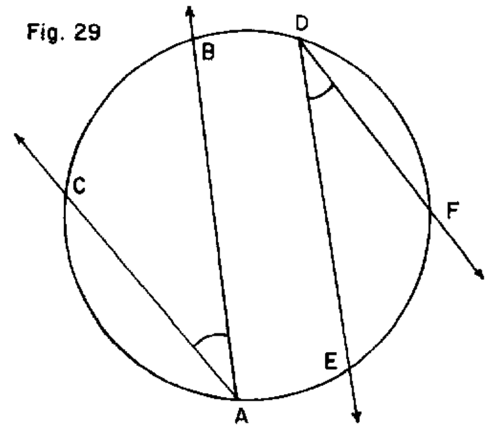


Fig. 29

> Definición: En una circunferencia, si un ángulo tiene su vértice en la circunferencia y cada lado contiene una cuerda, entonces, el ángulo se llama inscrito.

Fijemos la atención en la relación entre las medidas del ángulo inscrito y el arco subtendido.

Como conocimiento previo, necesitamos recordar que (fig.30) la medida del ángulo BCD es igual a la suma de las medidas de los ángulos A y B

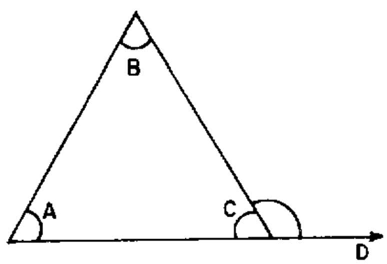


Fig. 30

Con este resultado en mente, demostraremos el siguiente teorema.

> Teorema 6: La medida del ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco subtendido entre sus lados.

HIPOTESIS: Un ángulo está inscrito en una circunferencia.

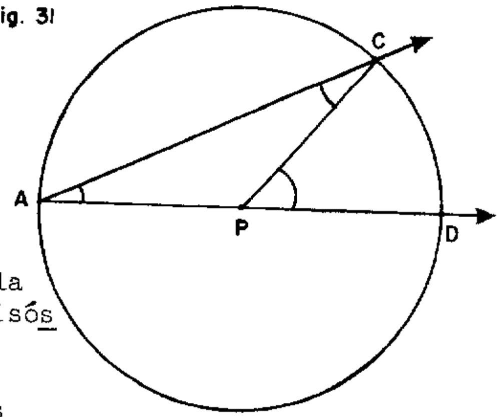
CONCLUSION: Su medida es la mitad del arco subtendido entre sus lados.

DEMOSTRACION:

Dividiremos la demostración en 3 casos.

Caso 1. (fig. 31) Uno de los lados del ángulo A, contiene al diámetro de la circunferencia.

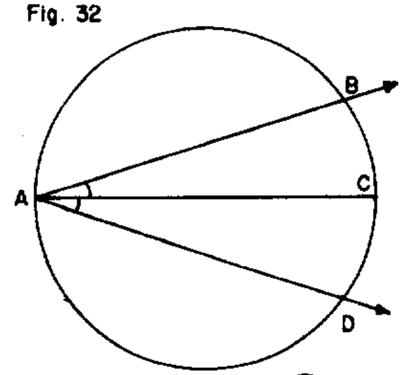
Fig. 31



AFIRMACIONES	RAZONES.
1. $m\sphericalangle CPD = m\sphericalangle C + m\sphericalangle A$	Resultado anterior
2. Δ CAP es isósceles	$\overline{PC} \cong \overline{PA}$
3. $\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$	Por ser ángulos en la base del triángulo isósceles.
4. $m\sphericalangle A = \dfrac{m\sphericalangle CPD}{2}$	Por las afirmaciones 1 y 3.
5. $m\sphericalangle A = \dfrac{m\widehat{DC}}{2}$	Porque la medida del ángulo CPD es la asociada al arco $\widehat{DC}$.

Caso 2. Los lados del ángulo inscrito están a cada lado de un diámetro fig. 32.

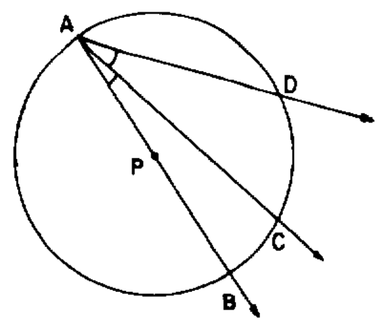
Fig. 32



AFIRMACIONES	RAZONES
1. $m\sphericalangle BAC = \dfrac{m\widehat{CD}}{2}$	Por el caso 1
2. $m\sphericalangle CAD = \dfrac{m\widehat{DC}}{2}$	Por el caso 1
3. $m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle CAD = \dfrac{m\widehat{CB}}{2} + \dfrac{m\widehat{DC}}{2}$	Sumando la expresión de la afirmación 1 con la expresión de la afirmación 2.
4. $m\sphericalangle BAD = \dfrac{m\widehat{DB}}{2}$	Porque $m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle CAD = m\sphericalangle BAD$ y $\dfrac{\widehat{CB}}{2} + \dfrac{\widehat{DC}}{2} = \dfrac{\widehat{CB}+\widehat{DC}}{2} = \dfrac{\widehat{DB}}{2}$

Caso 3. Los lados del ángulo inscrito, están del mismo lado de un diámetro, fig. 33.

Fig. 33



AFIRMACIONES	RAZONES
1. $m\,\widehat{CD} + m\,\widehat{BC} = m\,\widehat{BD}$	Sumando los arcos
2. $m\sphericalangle DAC + m\sphericalangle CAB = m\sphericalangle DAB$	Sumando los ángulos
3. $m\sphericalangle DAC + m\sphericalangle CAB = \dfrac{m\widehat{CD} + m\widehat{BC}}{2}$	Por el caso 1
4. $m\sphericalangle CAB = \dfrac{m\widehat{BC}}{2}$	Por el caso 1
5. $m\sphericalangle DAC + \dfrac{m\widehat{BC}}{2} = \dfrac{m\widehat{CD}}{2} + \dfrac{m\widehat{BC}}{2}$	Sustituyendo $m\sphericalangle CAB$ por $\dfrac{m\widehat{BC}}{2}$
6. $m\sphericalangle DAC = \dfrac{m\widehat{CD}}{2}$	Restando a ambos miembros $\dfrac{m\widehat{BC}}{2}$

EJERCICIOS:

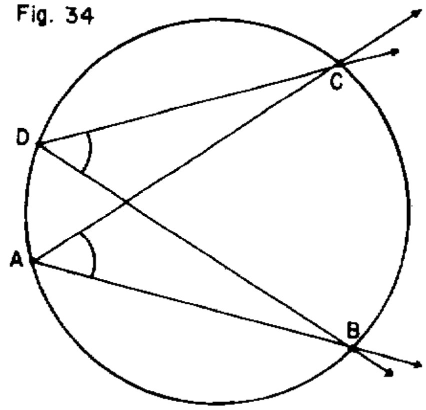
Tres resultados inmediatos del teorema 6, son los siguientes:

a) Los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes.

Observa la figura 34. A continuación se darán las afirmaciones y debes completar las razones.

HIPOTESIS: Los ángulos inscritos subtienden el mismo arco.
CONCLUSION: Los ángulos son congruentes.

Fig. 34



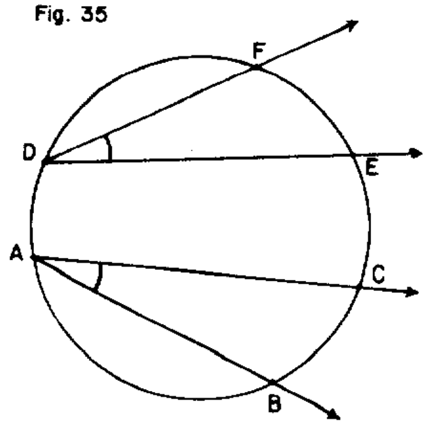
AFIRMACIONES	RAZONES
1. $m\measuredangle A = \frac{m\widehat{BC}}{2}$	
2. $m\measuredangle D = \frac{m\widehat{BC}}{2}$	
3. $m\measuredangle A = m\measuredangle D$	
4. $\measuredangle A \cong \measuredangle D$	

b) Los ángulos inscritos que subtienden arcos congruentes son congruentes. Observa la figura 35. Da tus afirmaciones y razones.

HIPOTESIS: Los ángulos inscritos subtienden arcos congruentes.
CONCLUSION: Los ángulos son congruentes.

AFIRMACIONES	RAZONES
1.	
2.	
3.	
4.	

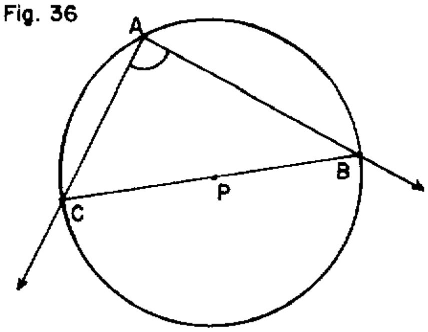
Fig. 35



c) Si un ángulo inscrito subtiende un arco ($\widehat{CB}$) de 180° (figura 36), entonces la cuerda $\overline{CB}$ es un diámetro.

Usando el teorema 6, ¿cuánto mide el ángulo A?

Fig. 36



d) Usando el resultado del inciso (c) y el ángulo de 90° de una escuadra (o de una hoja de papel), localiza el centro de las siguientes circunferencias.

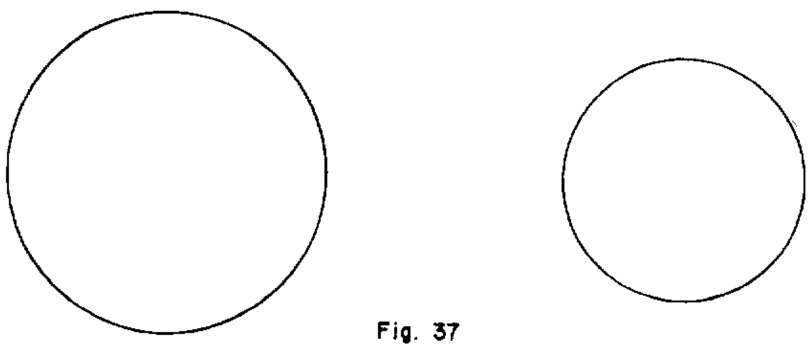


Fig. 37

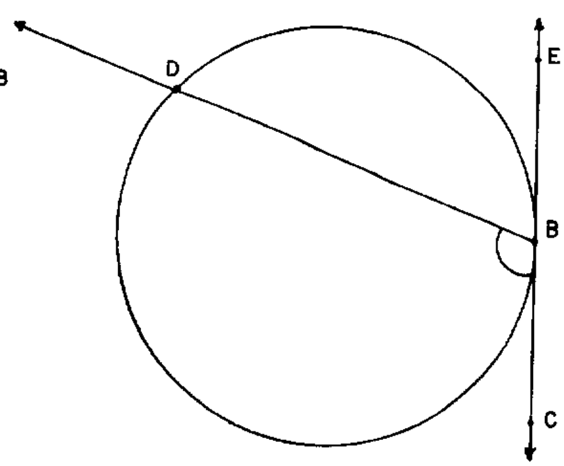
ANGULO SEMI-INSCRITO

En la figura 38, el lado $\overrightarrow{BC}$ del ángulo CBD pertenece a la tangente $\overleftrightarrow{EC}$ y el lado BD es una cuerda

Este tipo de ángulos, recibe el nombre de ángulos semi-inscritos.

Definición: En una circunferencia, si un ángulo tiene su vértice en la circunferencia, uno de los lados es tangente a la circunferencia y el otro es una cuerda, entonces el ángulo se llama semi-inscrito.

Fig. 38



El siguiente teorema, relaciona la medida del arco subtendido, con el ángulo semi-inscrito que lo contiene.

> Teorema 7: En una circunferencia, la medida del ángulo semi-inscrito, es la mitad del arco del interior del ángulo.

HIPOTESIS: En una circunferencia, hay un ángulo semi-inscrito.

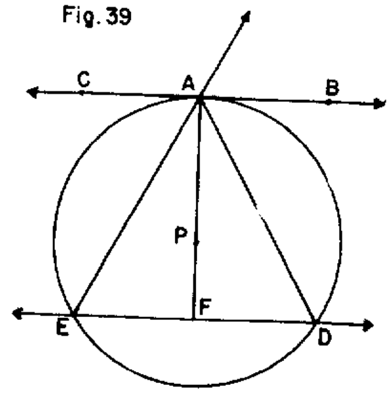
CONCLUSION: Su medida es la mitad del arco en su interior.

DEMOSTRACION.

En la figura 39, el ángulo BAD es semi-inscrito, $\overleftrightarrow{ED}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{AF}$ es perpendicular a ED y el triángulo AED es isósceles.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\measuredangle ADE \cong \measuredangle DEA$	Por ser ángulos en la base del triángulo isósceles.
2. $m \measuredangle DEA = \frac{m\overparen{DA}}{2}$	Por ser angulo inscrito y usando el teorema 6.
3. $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ADE$	Por ser alternos internos entre paralelas.
4. $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ADE \cong \measuredangle DEA$	Por las afirmaciones 1 y 3
5. $m \measuredangle DAB = \frac{m\overparen{DA}}{2}$	Porque si $\measuredangle DAB \cong \measuredangle DEA$ entonces tienen la misma medida y la medida del $\measuredangle DEA$ es $\frac{m\overparen{DA}}{2}$

Fig. 39



EJERCICIOS:

a) En la figura 40, ED es paralela a $\overleftrightarrow{CB}$; $\overleftrightarrow{AP}$ es perpendicular tanto a $\overleftrightarrow{ED}$ como a $\overleftrightarrow{CB}$. El triángulo A B C es isósceles. ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$)y el ángulo B mide 51°. Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto mide el ángulo ACB?
2. ¿Cuánto mide el ángulo DAB?
3. ¿Cuánto mide el ángulo BAP?
4. ¿Cuánto mide el ángulo EAC?
5. ¿Cuánto mide el ángulo ACF?

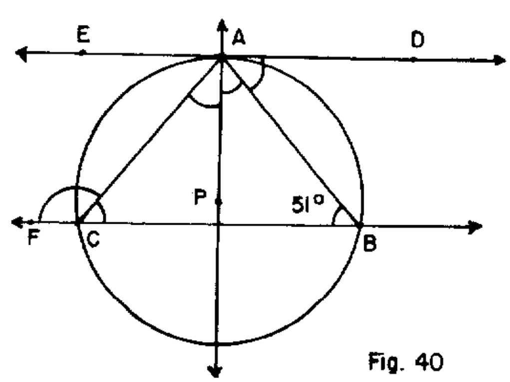
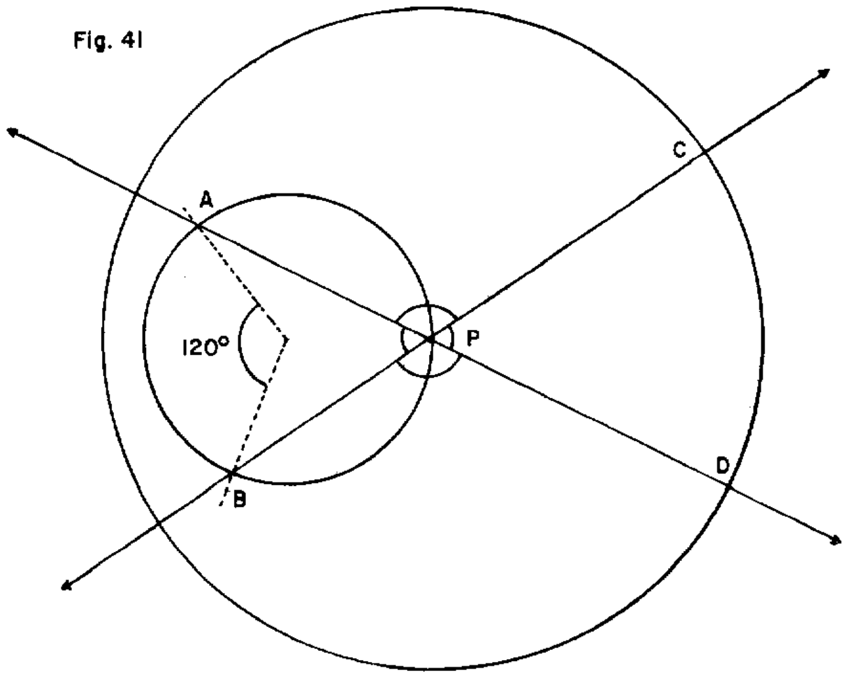


Fig. 40

b) En la figura 41, la medida del arco AB es de 120°.

1. ¿Cuánto mide el ángulo APB?
2. ¿Cuánto mide el ángulo CPD?
3. ¿Cuánto mide el ángulo APC?
4. ¿Cuánto mide el ángulo BPD?
5. ¿Cuánto mide el arco DC?

Fig. 41



MEDIDA DE LOS ARCOS EN RADIANES.

Desde el primer curso de matemáticas, sabemos que el perímetro de una circunferencia es:

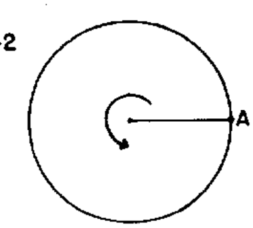
$$P = 2\pi r$$

Donde: P es el perímetro; r el radio y π el número: 3.1415926...

Por otro lado, la medida del ángulo de toda la circunferencia es de 360°. De donde podemos establecer la igualdad: $360° = P$, de donde:

$$\boxed{360° = 2\pi r}$$

Fig. 42



La medida del arco $\widehat{AA}$ es de 360°

Ahora, podemos saber cuánto mide r en función de los grados; ésto es:

$$360° = 2\pi r$$

Despejando a r:

$$\frac{360°}{2\pi} = r$$

Haciendo la división:

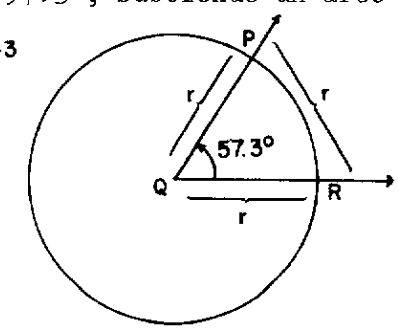
$$\frac{360°}{2\pi} = \frac{360}{2(3.1415926} = 57.2957....$$

Redondeando el resultado a una cifra decimal tenemos que:

$$\boxed{r = 57.\ 3°}$$

De este resultado, sabemos que un ángulo central de 57.3°, subtiende un arco - igual al radio fig. 43

Fig. 43



El ángulo PQR mide 57.3°; asi que el arco RP mide lo mismo que el radio.

Con esto, definimos un radian como sigue:

Definición: En una circunferencia un radián es la medida de un arco, cuya longitud es igual al radio.

La equivalencia de un radián en grados es:

$$\boxed{1 \text{ radián} = 57.3°}$$

Consideremos el problema de saber cuál es la equivalencia de un grado en radianes. Iniciamos con la expresión:

$360° = 2\pi$ (1 radián) (observa que: $360° = 2\pi\ (57.3°)$)

Dividiendo ambos miembros entre 360° tenemos:

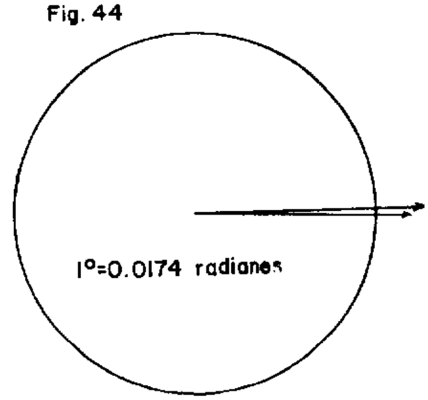
$$\frac{360°}{360°} = \frac{2\pi\ (1 \text{ radián})}{360°}$$

$$1° = \frac{6.28319(1 \text{ radián})}{360°} = 0.0174533 \text{ radianes}$$

Aproximando a 4 cifras decimales tenemos:

$$\boxed{1° = 0.0174 \text{ radianes}}$$

Fig. 44



EJERCICIOS:

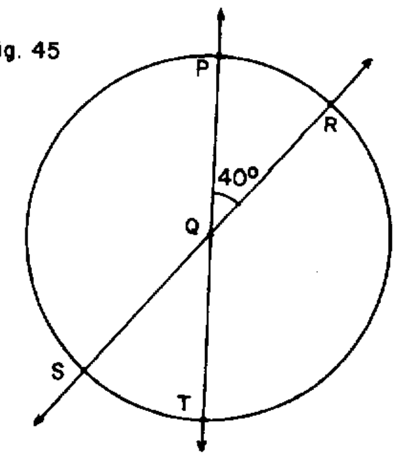
a) Dibuja una circunferencia y en ella traza:

1. Un ángulo central que subtienda un arco de 2 radianes.
2. Un arco que esté subtendido por un ángulo central de 114.6°
3. Un arco de 3 radianes.

b) En la figura 45, el ángulo PQR mide 40°
Encuentra la medida, en radianes, de:

1. $\overset{\frown}{PS}$
2. $\overset{\frown}{ST}$
3. $\sphericalangle$ PQS
4. $\overset{\frown}{RP}$
5. $\sphericalangle$ RQT

Fig. 45



LUGAR GEOMETRICO

En las definiciones de circunferencia, ángulo inscrito, tangente, etc., se han explicitado las condiciones que deben cumplir los puntos de un plano para pertenecer a las figuras definidas.

Por ejemplo, en la definición de circunferencia se dice:

"... es el conjunto de todos los puntos de un plano, que están a la misma distancia del centro"

En la definición de radio. se menciona:

"El segmento que une el centro con cualquier punto..."

En general podemos decir que:

Definición: Lugar geométrico, es el conjunto de puntos, de un plano, que cumplen con al menos una condición geométrica.

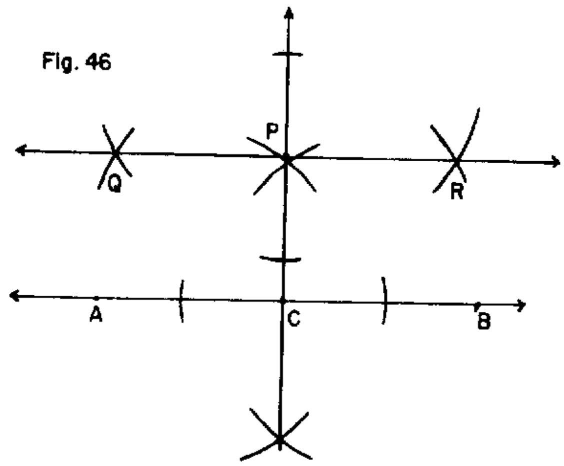
EJEMPLOS:

1. Si damos una recta AB y un punto P que no esté contenido en la recta, el lugar geométrico de todos los puntos que estén a la misma distancia de P a la recta AB, es una recta paralela que contiene a P, fig. 46

2. Dados dos puntos A y B, el lugar geomé trico de los puntos que están a la misma distancia de A y B es la mediatriz del segmento AB

3. Dados dos rayos PA y PB con P como punto común, el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia del rayo PA y del rayo PB, es la bisectriz del ángulo BPA.

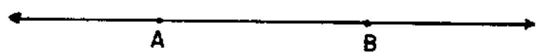
Fig. 46



EJERCICIOS:

a) Encuentra el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a 5 centimetros de la recta AB (fig. 47)

Fig. 47



b) Calca la figura 43 y encuentra el lugar geométrico de todos los puntos que están a 5 cm del punto P.

c) Encuentra el lugar geométrico (circunferencia) que sea tangente a las circunferencias C_1, C_2, C_3 de la fig. 48 (dos soluciones)

Fig. 48

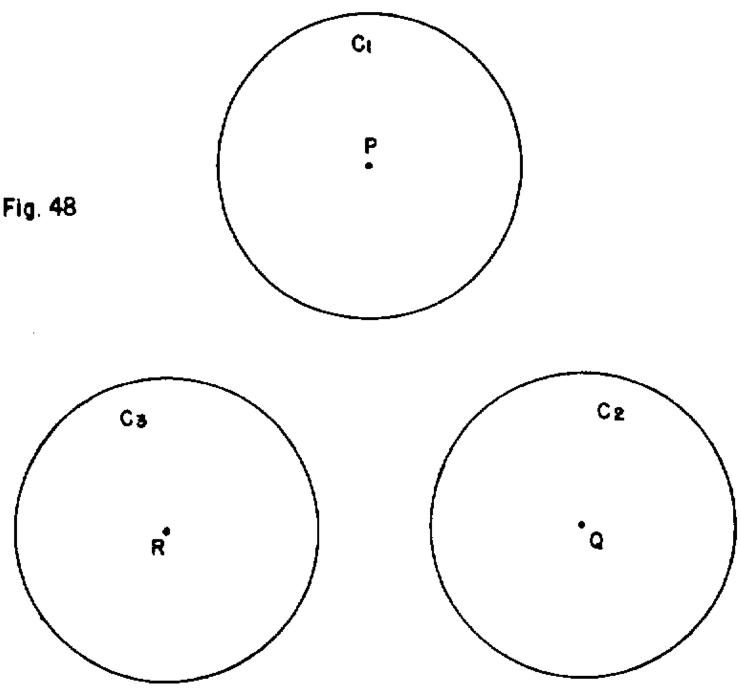


figura 48

e) En la figura 49, se ha dibujado un cuadrado inscrito en el triángulo ABC, de tal manera que un lado del cuadrado, esté sobre el lado AB del triángulo; usando únicamente regla y compás.

Los pasos fueron los siguientes:

1. Se localiza un punto cualquiera que llamamos P sobre el lado $\overline{AC}$ de triángulo.

2. Se traza la perpendicular al lado $\overline{AB}$ que contenga a P y se localiza Q en la intersección de esa recta y el lado AB.

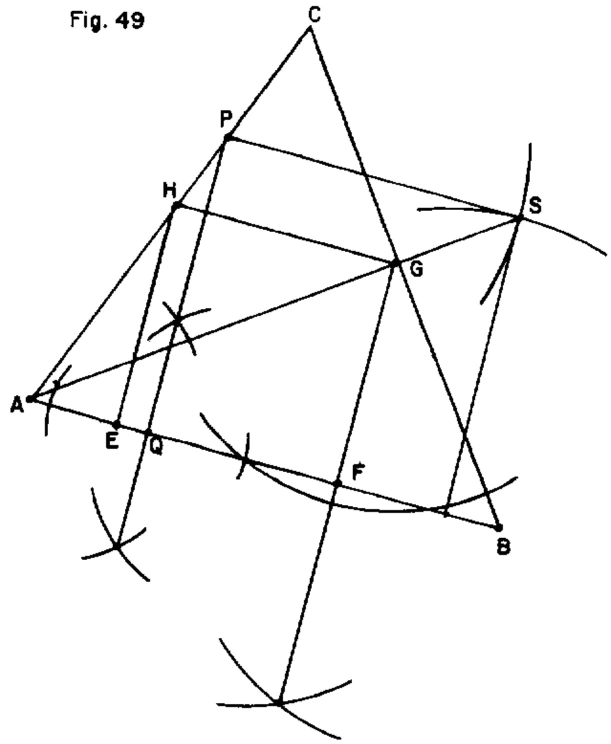
3. Con la medida $\overline{PQ}$ se traza el cuadrado PQRS.

4. Se dibuja la recta AS y se localiza el punto G sobre el lado $\overline{CB}$ del triángulo.

5. Se traza la perpendicular al lado AB que contenga a G.

6. Con la medida FG se dibuja el cuadrado GHEF.

Fig. 49



- Dibuja el cuadrado inscrito en el triángulo ABC figura 50, de tal manera que uno de los lados del cuadrado, esté sobre el lado $\overline{AB}$, empleando únicamente regla y compás.

- Dibuja una circunferencia, de tal manera que contenga las vértices del cuadrado del inciso a.

- Traza una circunferencia de tal manera que contenga los vértices del triángulo de la figura 50.

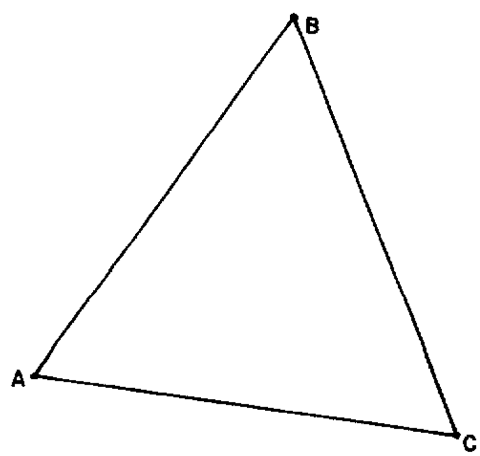


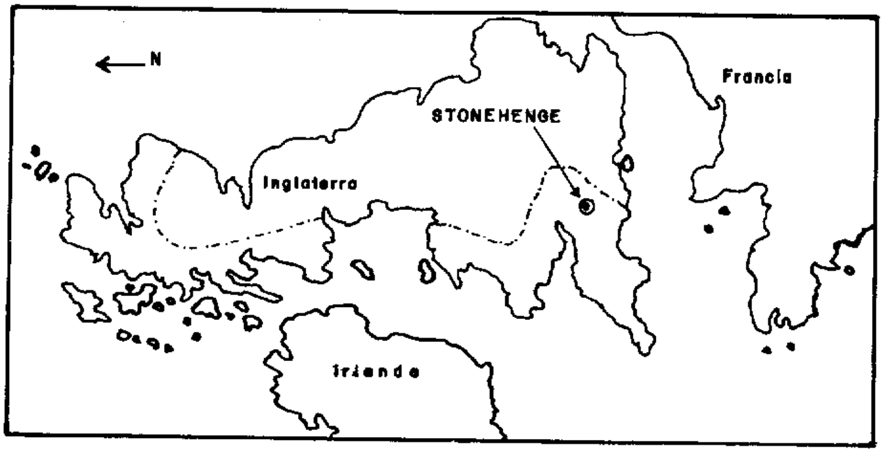
Fig. 50

NOTA HISTORICA

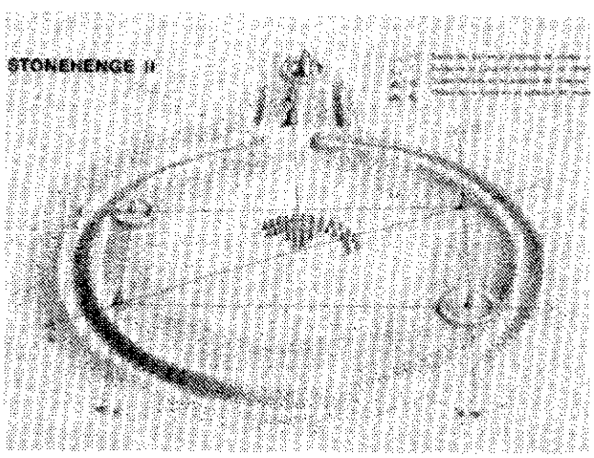
STONEHENGE

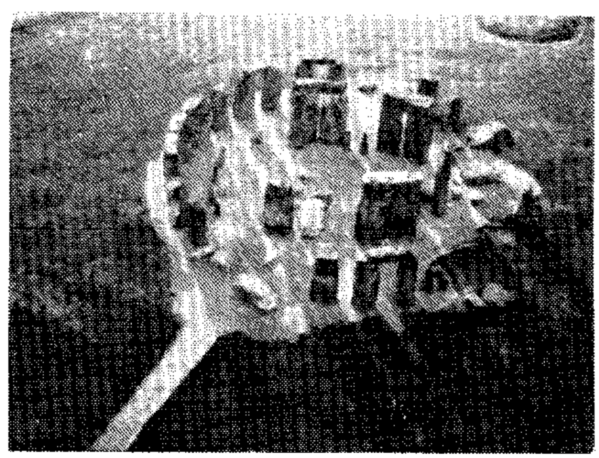
Los arqueólogos consideran que, hacia el año 2750 antes de nuestra era, comenzó la construcción del observatorio Stonehenge.

Los cuatro pilares denominados "Starion Stones" son vértices de un rectángulo - inscrito en el círculo donde se cruzan líneas lunares.



Si trazamos un lado y la diagonal de tres de esos pilares, obtendremos un ángulo en la circunferencia con el vértice en ella. Esta clase de ángulos se llaman ángulos inscritos.





unidad 6

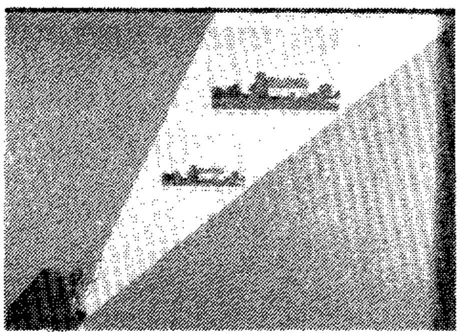
semejanza

MUCHAS COSAS SE JUZGAN IMPOSIBLES DE HACER, ANTES DE QUE SEAN HE- - CHAS.

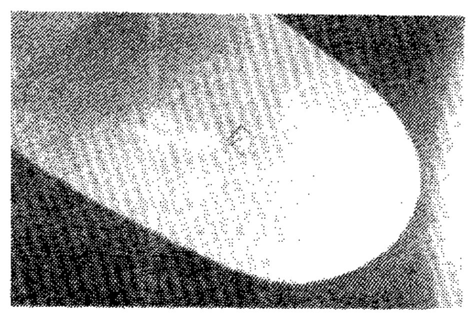
PLINIO.

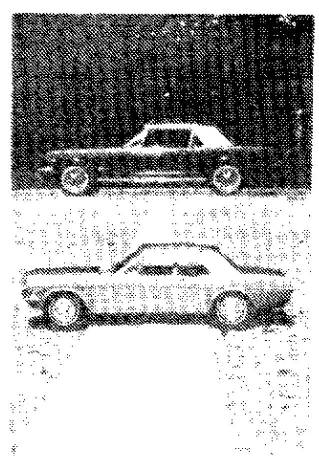
I N T R O D U C C I O N

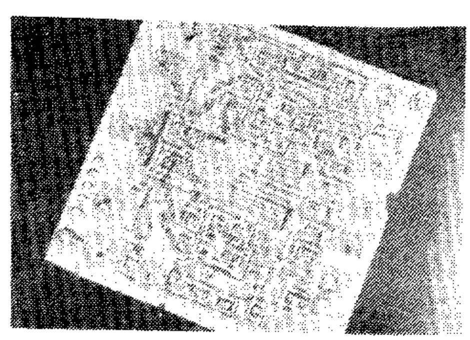
Cuando consideramos una imagen amplificada o reducida de algún objeto, hablamos de semejanza. Ejemplos de este tipo los podemos ver en todas partes. Recordemos las imágenes reflejadas en una pantalla de proyección. Si quisiéramos observarlas a mayor o menor tamaño bastaría con aumentar o disminuir, respectivamente, la distancia que hay entre el proyector y la pantalla.



El estudio de la semejanza reviste gran importancia ya que nos da idea, mediante pequeños modelos, de objetos que tendrán que elaborarse posteriormente y que, además, pueden ser de gran tamaño, o, bien, obtener modelos grandes de objetos que, dado su diminuto tamaño, no sería posible analizar de manera sencilla.







OBJETIVOS PARTICULARES:

* Construirá figuras semejantes, utilizando el concepto de escala.

* Analizará las propiedades de figura semejantes, mediante la comparación de sus elementos homólogos.

* Demostrará algunos teoremas sobre semejanza.

* Aplicará las nociones de congruencia y semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

* Aplicará el concepto de semejanza en la resolución de ejercicios y problemas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Obtendrá la escala a la que están dos figuras semejantes.

- Interpretará escalas en dibujos y mapas.

- Construirá figuras semejantes, utilizando diferentes escalas.

- Distinguirá elementos homólogos, en figuras semejantes.

- Encontrará las relaciones que existen entre elementos homólogos de figuras semejantes.

- Demostrará el teorema de Thales.

- Demostrará que toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo forma otro triángulo semejante al primero.

- Demostrará los tres casos de semejanza de triángulos.

- Deducirá el concepto de homotecia al construir figuras semejantes.

- Comprobará que la homotecia conserva las mismas propiedades de la semejanza.

- Aplicará la semejanza a la demostración del teorema de Pitágoras.

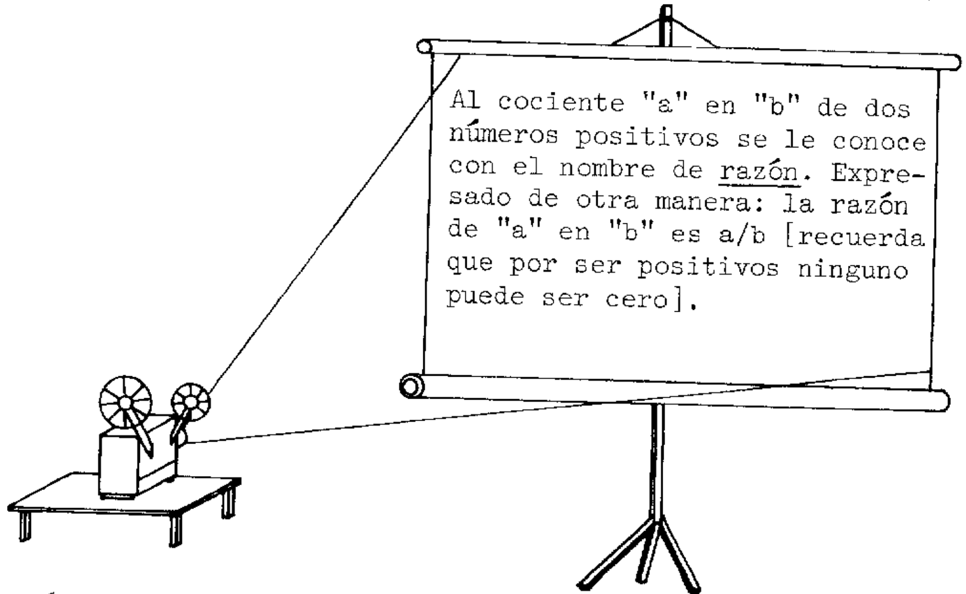
- Construirá la cuarta proporcional.

- Construirá la medida proporcional.

- Aplicará la semejanza de figuras a la resolución de problemas.

R A Z O N

Iniciaremos, el estudio de esta unidad, con un concepto mediante el cual se hace la comparación entre dos números para poder establecer el tipo de relación que entre ellos hay.



Ejemplos:

Sea: $a=3$; $b=4$; $c=6$; $d=7$

La razón de a en b es $\frac{3}{4}$

La razón de c en d es $\frac{6}{7}$

La razón de b en c es $\frac{4}{6}$

La razón de b en a es $\frac{4}{3}$

La razón de a en c es $\frac{3}{6}$

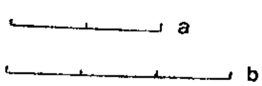
La razón de d en b es $\frac{7}{4}$

El concepto de razón también se aplica entre segmentos.

La razón que hay de un segmento en otro, es la razón que hay entre las medidas de dichos segmentos.

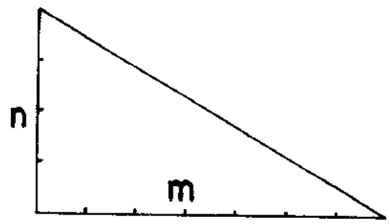
Ejemplos:

a) Dados dos segmentos "a" y "b" cuyas longitudes son 2 y 3 respectivamente, la razón "a" en "b" entre dichos segmentos es:



razón $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ por ser $a=2$ y $b=3$

b) La razón de "m" en "n" que hay entre dos de los lados del triángulo trazado a continuación es:



razón $\frac{m}{n} = \frac{7}{4}$ por ser

$m=7$ y $n=4$

c) La razón de "b" en "a" que hay entre los segmentos del inciso (a) es:

razón $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ por ser $b=3$ y $a=2$

Date cuenta que la razón del inciso (a) es diferente a la razón del inciso (c). Esto es, $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$; $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$

De todo lo anterior, es posible ver que la razón que hay de un número en otro es sólo una manera de comparar tales números.

Si $\frac{a}{b} > 1$, entonces $a>b$; si $\frac{a}{b} < 1$, entonces $a<b$ y si $\frac{a}{b} = 1$, entonces $a=b$.

Ejercicios:

1.- Sea $a=2$; $b=6$; $c=7$; $d=9$

Encuentra las razones que se indican a continuación:

La razón de a en b es

La razón de b en d es

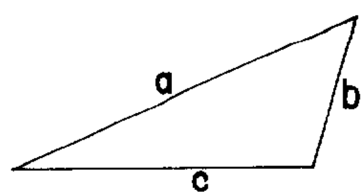
La razón de c en d es

La razón de d en a es

La razón de b en c es

La razón de c en b es

2.- Considerando la figura siguiente:

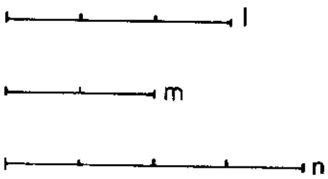


Mide y encuentra la razón que hay entre las parejas dadas a continuación:

$\frac{a}{b} =$ $\qquad$ $\frac{c}{a} =$ $\qquad$ $\frac{c}{b} =$

$\frac{b}{c} =$ $\qquad$ $\frac{b}{a} =$ $\qquad$ $\frac{a}{c} =$

3.- Considera la medida de los segmentos l, m y n, y encuentra las razones indicadas.



m en n = n en l =

l en m = l en n =

4.- Escribe el signo de relación (>, <, =) según corresponda a cada pareja de números, si se cumplen las siguientes condiciones:

Si $\frac{a}{b} > 1$, entonces a ___ b

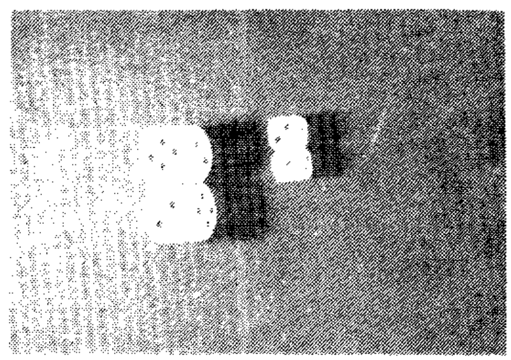
Si $\frac{c}{d} = 1$, entonces c ___ d

Si $\frac{c}{a} < 1$, entonces c ___ a

P R O P O R C I O N

Dadas dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, diremos que están en proporción si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. En otras palabras: cuando consideramos una pareja de números (por ejemplo 1 y 2) cuya razón es la misma de otra (digamos 4 y 8), decimos que están en proporción por tener ambas parejas la misma razón.

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$



Observa que los números que están en proporción conservan las mismas propiedades de la equivalencia entre racionales.

Esto es: si multiplicamos en diagonal (el denominador de una de las razones por el numerador de la otra), obtenemos el mismo número: 8

(8)(1)=8 (2)(4)=8

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

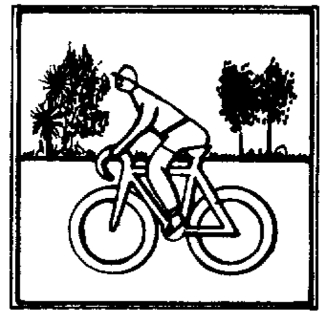
Ejemplos:

a) Siendo a=3 ; b= 11 ; c= 6 ; d=22

Las razones $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ están en proporción, ya que : $\frac{3}{6} = \frac{11}{22}$

Si multiplicamos en diagonal el producto es el mismo.

b) Si un ciclista recorre 16 Km. en 20 minutos, viajando a velocidad constante ¿Cuántos Km. recorrerá en 45 minutos?



$$\frac{\text{Km. recorridos}}{\text{Tiempo en min.}} \quad \frac{16}{20} = \frac{X}{45} \quad \frac{\text{Km. recorridos}}{\text{Tiempo en min.}}$$

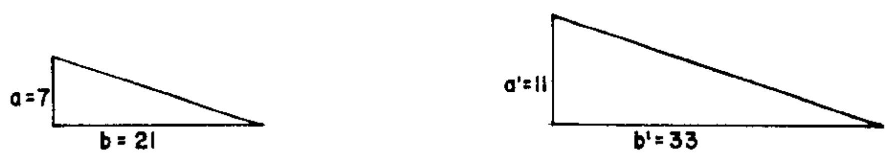
Resolviendo la ecuación:

$$X = \frac{(16)(45)}{20} = \frac{720}{20} = 36$$

Solución: recorrerá 36 Km.

Ejercicios:

1.- Verifica que las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ están en proporción y ¿ Cuál es el producto que se obtiene en sus diagonales?



2.- Comprueba que, al intercambiar números en diagonal se conserva la proporción.

$$\frac{7}{21} = \frac{11}{33} \qquad (\ )(\ ) = \quad \frac{33}{21} = \frac{11}{7} \quad (\ )(\ ) =$$

3.- ¿Serán válidas las siguientes proporciones?

$$\frac{33+21}{21} = \frac{11+7}{7} \qquad \frac{33-21}{21} = \frac{11-7}{7}$$

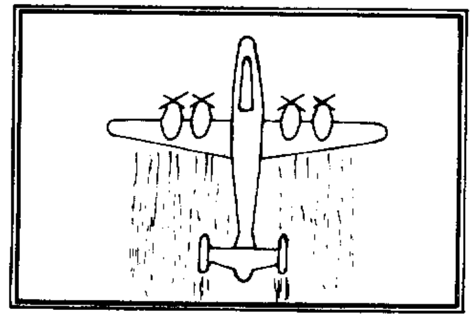
4.- Encuentra el valor de X en cada una de las proporciones siguientes:

a) $\frac{X}{9} = \frac{2}{6}$

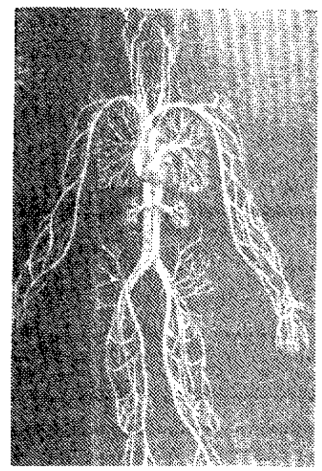
b) $\frac{5}{7} = \frac{2X}{14}$

c) $\frac{5}{6} = \frac{X}{x+2}$

5.- Un avión, viajando a una velocidad constante, recorre una distancia de 450 Km. en 30 minutos. ¿ Cuánto tiempo le llevará recorrer 675 Km.?

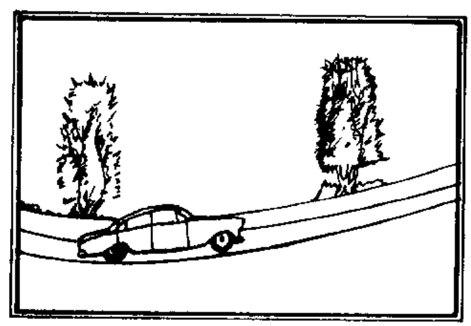


6.- Si el corazón de un adulto efectúa 20 palpitaciones en 15 segundos. ¿Cuántas palpitaciones tendrá en 33 segundos?



7.- Si la razón que hay entre el peso de la sangre y el peso del cuerpo que la contiene es de 2/27 ¿ Cuántos Kg. de sangre habrá en un cuerpo que pesa 54 Kg.?

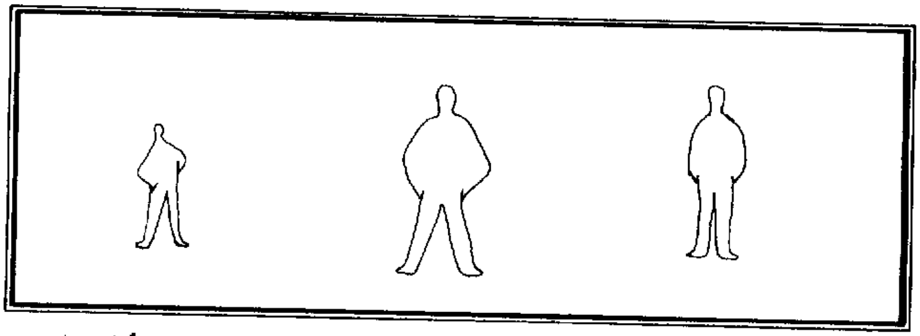
8.- Si un automóvil recorre 34 Km. en 20 minutos, viajando a velocidad constante. ¿ Cuántos Km. recorrerá en 50 minutos?



El concepto de proporcionalidad es valioso, puesto que también nos permite interpretar la escala a la que se encuentran las fotografías, los mapas, las maquetas y los dibujos en general.

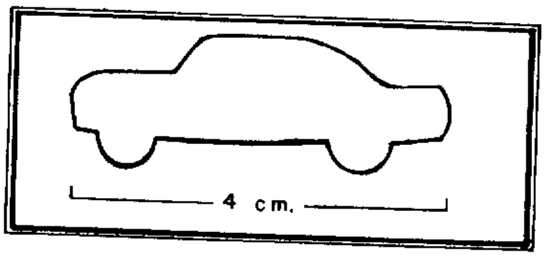
E S C A L A S

A la relación constante que hay entre las dimensiones de la representación (dibujo, mapa, modelo, plano, maqueta, etc.) de un objeto y sus dimensiones reales, se le conoce como <u>escala</u>.



Una representación a escala es, entonces, la reducción o ampliación del trazo o del objeto, conservando la misma forma. Las relaciones entre las dimensiones obtenidas en la representación y las correspondientes dimensiones reales deberán mantenerse siempre constantes.

Ejemplos:



Si la longitud que tiene un automóvil es de 4 m. y se va a representar por una longitud de 4 cm., la escala a usar es:

$$\frac{4\text{ cm.}}{4\text{ m.}} = \frac{4\text{ cm.}}{400\text{cm.}} = \frac{4}{400} = \frac{1}{100}$$

Escala:	1:100

Lo cual quiere decir que por cada cm. que se traza en el dibujo, se están representando 100 cm. (100 cm. = 1 m.)

Si la altura de un edificio es de 15 m. y se va a representar por un trazo de 30 cm., la escala a usar es:

$$\frac{30\text{ cm.}}{15\text{ m.}} = \frac{30\text{ cm.}}{1500\text{cm.}} = \frac{30}{1500} = \frac{3}{150} = \frac{1}{50}$$

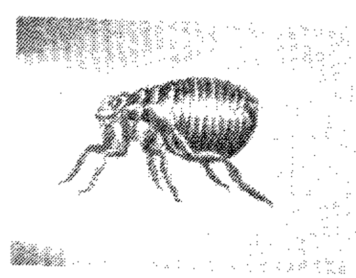
Escala:	1:50

Lo cual significa que por cada cm. de trazo en el dibujo, se están representando 50 cm.
(observa que, en la escala, colocamos en el numerador la medida del trazo y en el denominador la del objeto a ser representado).

Si la longitud de una pulga es de 2 mm. y se va a representar por un trazo de 5 cm., la escala a usar es:

$$\frac{5\text{ cm.}}{2\text{ mm.}} = \frac{50\text{ mm.}}{2\text{ mm.}} = \frac{50}{2} = \frac{25}{1}$$

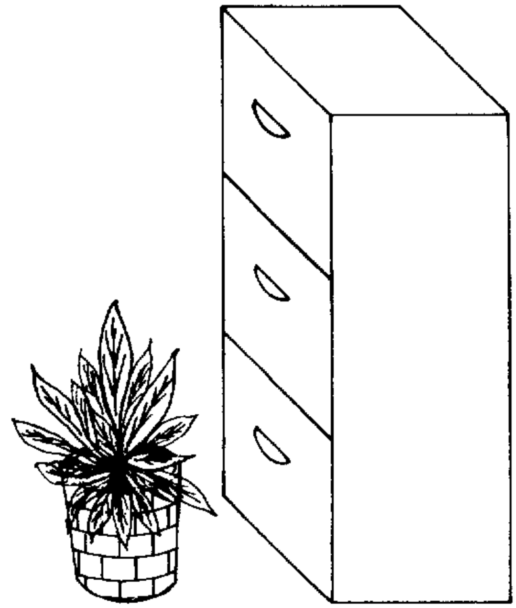
Escala:	25:1



Lo cual significa que se aumentó 25 veces el tamaño real.

Si se desea dibujar, a escala 1:10, un escritorio cuya altura es de 77 cm., para encontrar la altura que tendrá dicho dibujo, procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{10} = \frac{X}{77}$$



Resolviendo la proporción

$$X = \frac{77}{10} = 7.7 \text{ cm.}$$

El dibujo deberá tener una altura de 7.7cm.

Si el dibujo de un estante tiene una altura de 10 cm. y se utilizó una escala 1:15. La altura real del estante se determina:

$$\frac{1}{15} = \frac{10}{X}$$

Resolviendo la proporción

$$X = 150 \text{ cm.}$$

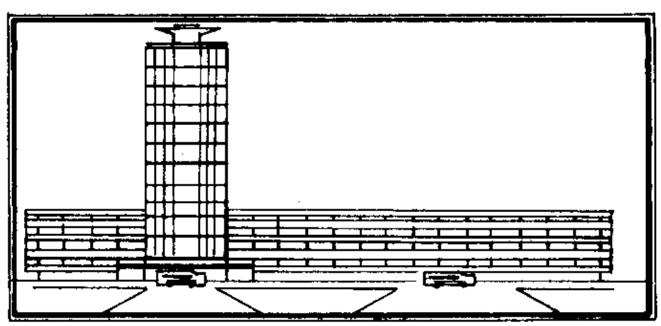
El estante tiene una altura de 1.50 m.

Ejercicios:

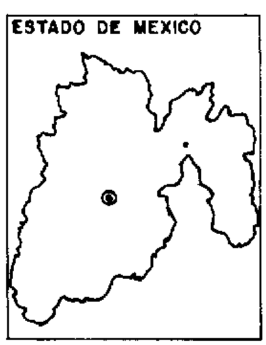
1.- Si la altura de un autobús es de 3 m. y se va a representar con un trazo de 30 cm. ¿ Cuál debe ser la escala a usar?

$$\frac{30 \text{ cm.}}{3 \text{ m.}} = \frac{\_\_\_\_ \text{ cm.}}{\_\_\_\_ \text{ cm.}} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$ Escala

2.- Si la altura de un edificio es de 12 m. y se va a representar con un trazo de 36 cm. ¿ Cuál debe ser la escala a usar?



3.- En un mapa del Estado de México, trazado a escala 1:200 000, la distancia que hay, en línea recta, de Toluca a Cuautitlán Izcalli es de 31 cm. ¿ Cuál será la distancia real?



4.- Dibuja, a escala 1:25, el escritorio que hay en tu aula.

5.- Haz, en tu cuaderno, un dibujo a escala del pizarrón.

S E M E J A N Z A

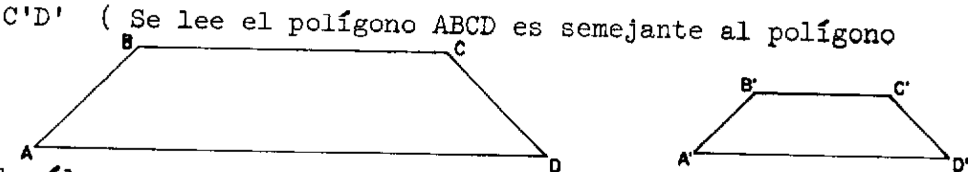
Si tenemos dos figuras trazadas a escala, se dice que estamos trabajando figuras semejantes. Dos polígonos son semejantes si tienen el mismo número de lados y, además, sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

Esto es: para tener dos polígonos semejantes se requiere que sus ángulos homólogos conserven la misma medida y sus lados homólogos sean proporcionales ("homólogos" son aquellos elementos que se corresponden entre sí).

En lo sucesivo, utilizaremos el símbolo "◇" para referirnos a polígonos.

Ejemplo:

◇ABCD ∿ ◇A'B'C'D' (Se lee el polígono ABCD es semejante al polígono A'B'C'D').



Porque:

1) Sus ángulos homólogos son congruentes:

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$; $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$; $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$; $\measuredangle D \cong \measuredangle D'$

2) Sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = K$$

En donde a la razón común "K" se le llama <u>constante de proporcionalidad</u>.

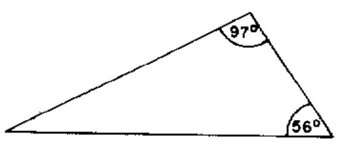
Ejercicios:

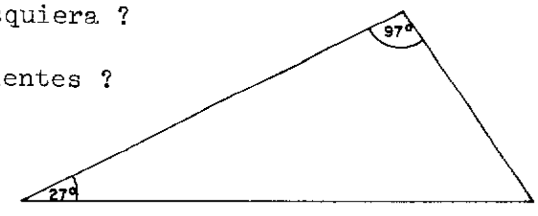
Con base a lo anterior responde:

1.- ¿ Serán semejantes dos triángulos equiláteros ?

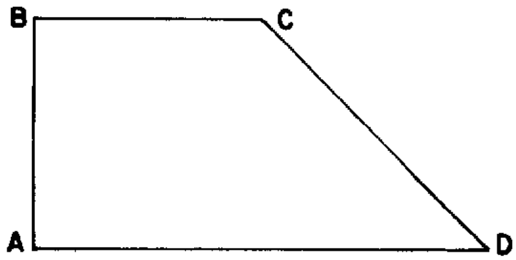
2.- ¿ Son semejantes dos cuadrados cualesquiera ?

3.- ¿ Son semejantes los triángulos siguientes ?

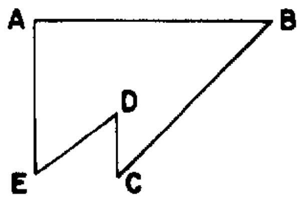




4.- Construye, utilizando la escala 1:3, un polígono A'B'C'D' semejante al si-- guiente:



5.- Construye un polígono A'B'C'D'E', semejante al ⬠ ABCDE, utilizando a escala 1:2



Para el desarrollo de la geometría a tenido que pasar mucho tiempo y han sido muchas las personas que se han dedicado a darle forma y sentido al estudio de la misma. Uno de los genios, de la Grecia antigua, que utilizó los conocimientos de proporcionalidad para conocer la altura que tenían determinados objetos fue el - que a continuación se menciona.

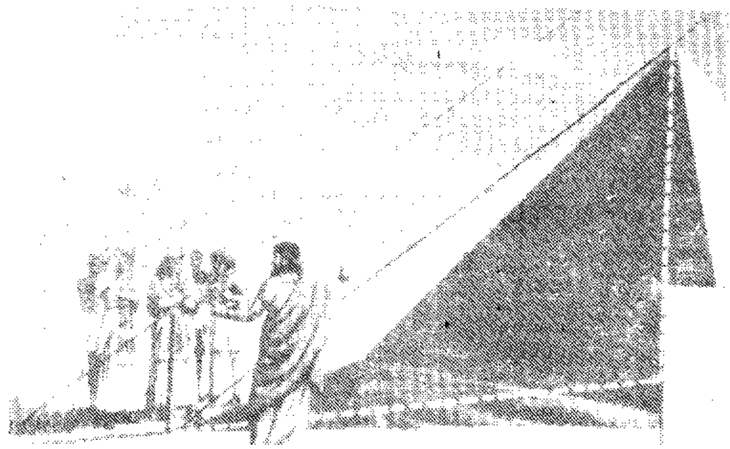
THALES DE MILETO.

Matemático, astrónomo y filósofo griego, era considerado un gran genio desde joven, aún cuando fue mercader y luego tuvo cargos políticos. Sólo en los últimos años de su vida se dedicó a sus estudios preferidos.

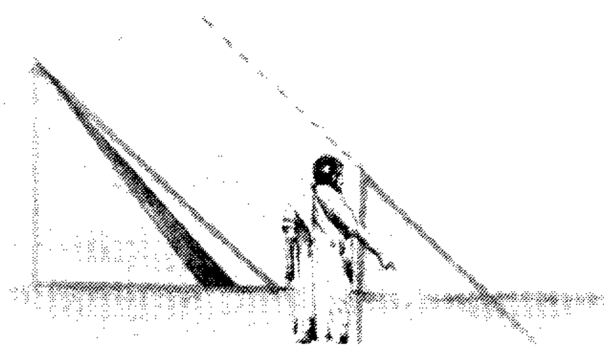
Se cuenta que, siendo aún niño, en compañía de los sabios del antiguo Egipto, pudo ver de cerca la - pirámide de Keops, "¿ Qué altura - piensas que tiene?", le preguntó - uno de los sacerdotes. Thales, después de un momento, respondió que - podría valorarla a "ojo" pero que - no le gustaba hablar de cifras sin ton ni son. Sonriendo, declaró que estaría en condiciones de medirla con suficiente precisión sin instrumento alguno y sin necesidad de subir a la cima de tan grandiosa construcción.

El sacerdote y las otras personas presentes le preguntaron al muchacho qué estaba pensando (tal vez intercambiando sonrisas de entendimiento todos se preguntaban si ese jovencito griego estaba enloqueciendo de presunción). ¿ Acaso no - era verdad que para construir el gran edificio, los mejores cerebros de Egipto, con el concurso de millones de esclavos, habían trabajado durante años inventando directamente nuevos instrumentos, nuevos métodos de trabajo, nuevos sistemas de medir longitudes, pesos, inclinaciones ?.

Thales se tendió en tierra y trazó dos signos en la arena; uno a la altura de su cabeza y el otro a la punta de sus pies. Luego, se levantó y trazó una línea recta entre los dos puntos. " Ahora me pararé en un extremo de esta línea, que mide lo mismo que mi persona y esperaré hasta que mi sombra tenga el mismo largo. En ese mismo instante, también la sombra de la pirámide tendrá el mismo largo que la altura del edificio.



Los sacerdotes y sus acompañantes quedaron asombrados por la simplicidad de la solución. Alguno se preguntó si por casualidad no habría un error y se trataría de un sofisma extremadamente lógico elaborado por ese muchacho prodigio. Pero Thales no había terminado: " Si quieren que mida la altura de la pirámide a cualquier hora del día, por ejemplo ahora (esto es, cualquiera que sea la posición del sol en nuestro horizonte y, por lo tanto, cualquiera que sea el largo de las sombras en la arena), puedo clavar en la tierra un palo. Miren: en este momento el largo de la sombra es, más o menos, la mitad de la altura del bastón. Por lo tanto, también la sombra de la pirámide sólo puede ser la mitad de la altura de esa construcción. No hay más que confrontar el largo del bastón con el de su sombra para encontrar en seguida(mediante división o multiplicación del largo de la sombra de la pirámide) la altura de esta última".

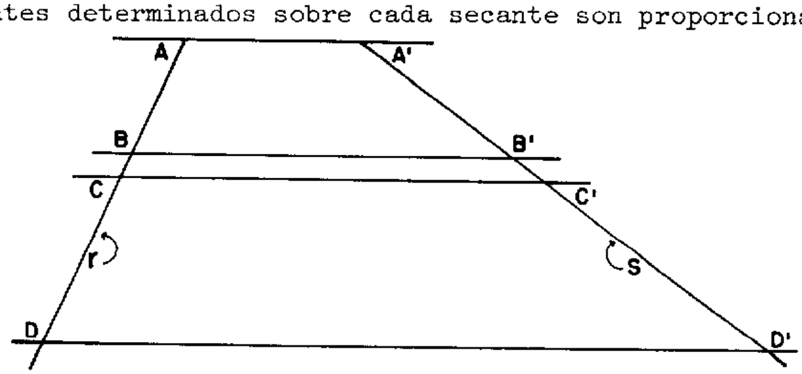


La fabulosa demostración geométrico-matemática de Thales frente a la pirámide de Keops - sea verdad o fruto de la leyenda - tiene su fundamento en la semejanza de los triángulos.

A continuación se enuncia su teorema:

TEOREMA DE THALES

Si una serie de paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos correspondientes determinados sobre cada secante son proporcionales.



En otras palabras, el teorema señala que, si $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ son rectas paralelas que son cortadas por dos secantes r y s, se cumplen las proporciones

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$$

Encontremos, para ser más precisos, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$

La proporción anterior la podemos escribir, también, como:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Mediante el uso de una regla graduada podemos saber cuál es la longitud de los segmentos en el dibujo dado.

$$\overline{AB}=2 \;;\; \overline{CD}=3 \;;\; \overline{A'B'}=3 \;;\; \overline{C'D'}=4.5$$

Y sustituyendo dichas medidas en la proporción,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \qquad\qquad \frac{2}{3} = \frac{3}{4.5}$$

observamos que el teorema se cumple.

Comprueba, a manera de ejercicio, las demás proporciones.

Si pusiste atención en la pequeña biografía de Thales de Mileto, te habrás dado cuenta que lo que él penso, para conocer la altura de la pirámide, fue una proporción.

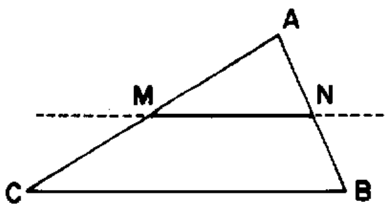
$$\frac{\text{Altura de la persona}}{\text{Sombra proyectada}} = \frac{\text{Altura de la pirámide}}{\text{Sombra proyectada}}$$

S E M E J A N Z A D E T R I A N G U L O S

Una de las aplicaciones del razonamiento anterior, se da en la construcción de triángulos semejantes.

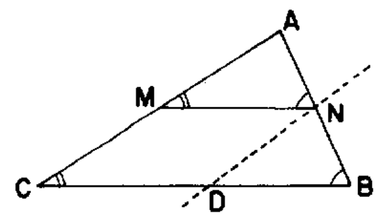
TEOREMA FUNDAMENTAL.

"Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados un trián gulo semejante al primero".



Tomemos un triángulo ABC, un punto M en el lado $\overline{AC}$ y tracemos una recta paralela a $\overline{CB}$ por M. Llamemos N al punto en el que esta recta intersecta al lado $\overline{AB}$.

Y probemos que $\triangle ANM \sim \triangle ABC$.



Una forma de lograrlo es trazando una paralela a $\overline{AC}$ por el punto N. Llamemos D al punto en que esta recta intersecta a $\overline{CB}$.

En los triángulos ANM y ABC:

$\measuredangle A \cong \measuredangle A$	Angulo común.
$\measuredangle N \cong \measuredangle B$	Por ser correspondientes.
$\measuredangle M \cong \measuredangle C$	Por ser correspondientes.

Por otro lado: utilizando el teorema de Thales.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} \qquad (1) \text{ Por ser } \overline{MN} \parallel \overline{BC}$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} \qquad (2) \text{ Por ser } \overline{ND} \parallel \overline{AC}$$

Al comparar (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} \qquad (3) \text{ Por transitividad.}$$

Además : $\overline{CD} = \overline{MN}$ (4) CMND es un paralelogramo.

Sustituyendo en (3) a $\overline{MN}$ por $\overline{CD}$:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{CB}}$$

Ya que:

$\sphericalangle A \cong \sphericalangle A$

$\sphericalangle N \cong \sphericalangle B$ y $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{CB}}$

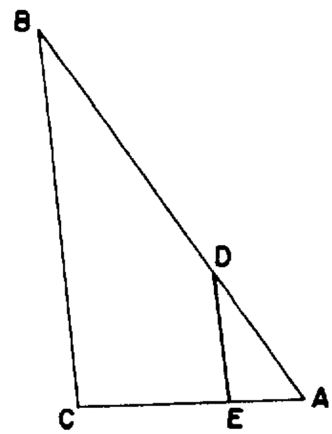
$\sphericalangle M \cong \sphericalangle C$

Se concluye que $\triangle ANM \sim \triangle ABC$

Es posible probar, también por mediciones, que si los triángulos son semejantes, la razón entre sus segmentos correspondientes siempre se conserva.

Ejemplo:

a) Considerando al triángulo ABC con $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



Probar que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$

¿ Cuál es la medida de los segmentos?:

$\overline{AB} = 4$ $\qquad$ $\overline{AC} = 2$

$\overline{AD} = 2$ $\qquad$ $\overline{AE} = 1$

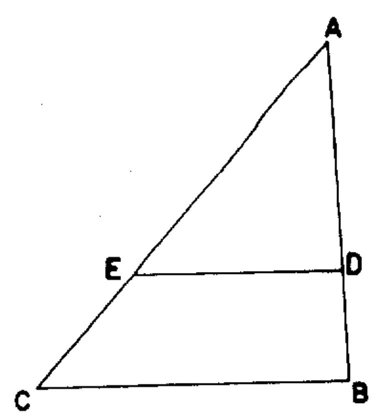
Sustituyendo dichas medidas en la proporción

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{4}{2} = 2$ y $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \dfrac{2}{1} = 2$

Ejercicios:

1.- En ABC, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces:

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ y $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{AC}}$



Midiendo,con una regla graduada, los segmentos:

$\overline{AD} =$ $\qquad$ $\overline{AE} =$ $\qquad$ $\overline{DB} =$

$\overline{AB} =$ $\qquad$ $\overline{AC} =$ $\qquad$ $\overline{EC} =$

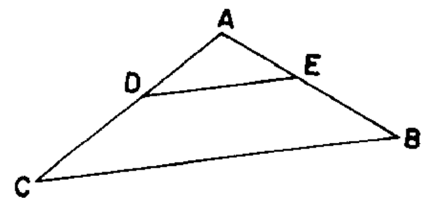
Sustituyendo en las proporciones

$\frac{AD}{AB} =$ $\frac{AE}{AC} =$ $\frac{DB}{AB} =$ $\frac{EC}{AC} =$

2.- En Δ ABC, con $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, completa las proporciones:

a) $\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} =$

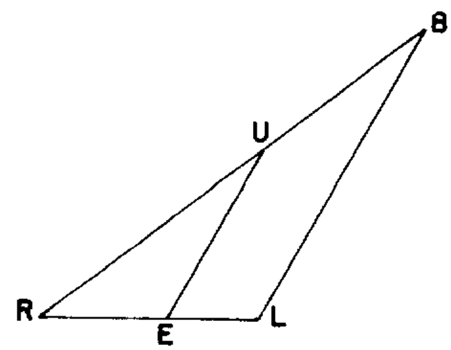
b) $\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} =$



En Δ RBL, con $\overline{EU} \parallel \overline{LB}$

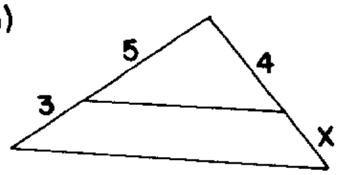
c) $\frac{\overline{EL}}{\overline{RE}} =$

d) $\frac{\overline{RU}}{\overline{RB}} =$

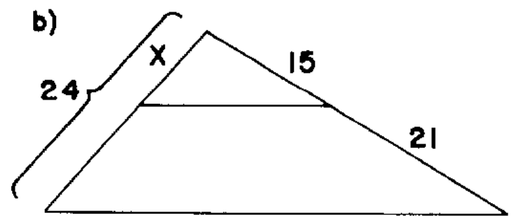


3.= Encuentra, mediante proporciones, la medida de X en cada una de las figuras -- siguientes.

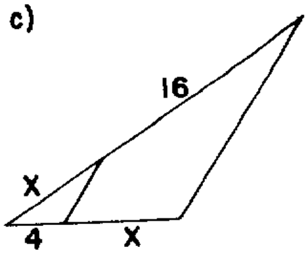
a)



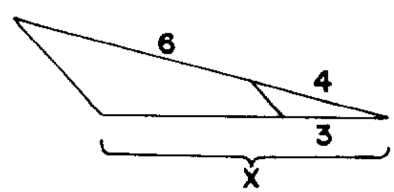
b)



c)



d)



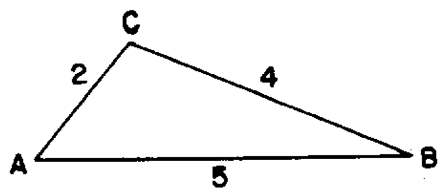
CASOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

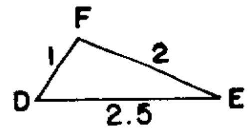
Para saber si dos triángulos son semejantes, no es necesario comprobar todas las condiciones anteriormente dichas (que los lados correspondientes sean proporcionales y los ángulos correspondientes sean congruentes), basta con cumplir ciertos criterios que a continuación se dan:

Primer Caso

TEOREMA LLL. Dos triángulos son semejantes cuando tienen proporcionales sus tres lados.

Si tenemos, por ejemplo:





donde:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

o bién:

$$\frac{5}{2.5} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

Midiendo los ángulos correspondientes podemos ver que efectivamente los triángulos son semejantes.

$\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$

$\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$

$\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$

Una forma de comprobar esto es dibujando en tu cuaderno el triángulo DEF y superponiéndolo al triángulo ABC, de tal manera que hagas coincidir, sucesivamente, los ángulos A, D; B, E y C, F.

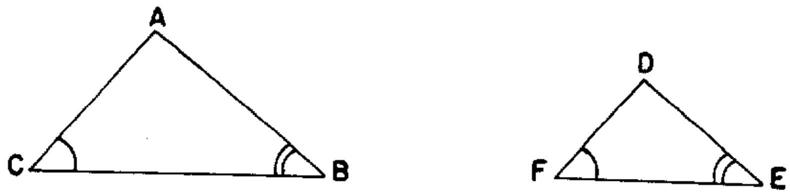
Segundo Caso

En la cuarta unidad vimos que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°, con esta información podemos decir que si conocemos dos ángulos de un triángulo, entonces sabremos cuál es la medida del otro ángulo.

TEOREMA AA. Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Veamos los siguientes triángulos ABC y DEF, donde

$\sphericalangle C \cong \sphericalangle F \quad y \quad \sphericalangle B \cong \sphericalangle E$



El teorema dice que estos triángulos son semejantes.

Sabemos que $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ por la propiedad de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo.

Con una regla graduada mide los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DF}$ que representan los lados de los triángulos y encontrarás que, efectivamente, están en proporción.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$$

Otra forma más que hay para saber si dos triángulos son o no semejantes es la siguiente:

Tercer Caso

TEOREMA LAL. Si en dos triángulos, un ángulo de uno de ellos es congruente con un ángulo del otro, y los lados que los forman son respectivamente proporcionales, los triángulos son semejantes.

Tracemos los triángulos ABC y DEF, de tal forma que se conserven las siguientes condiciones mínimas:

lados:

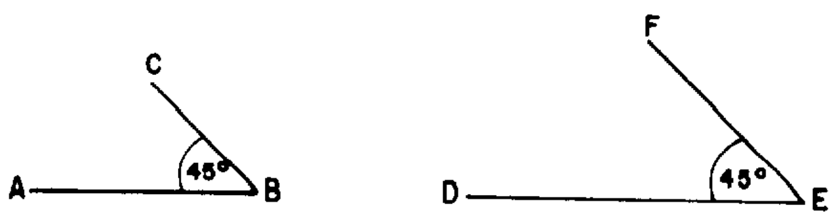
Δ ABC $\quad$ Δ DEF

$\overline{AB} = 3$ cm. $\quad$ $\overline{DE} = 4.5$ cm.

$\overline{BC} = 2$ cm. $\quad$ $\overline{EF} = 3$ cm.

ángulos:

$\sphericalangle B \cong \sphericalangle E = 45°$



Observa que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \qquad \text{ó} \qquad \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3}$$

Si unimos A con C y D con F, encontramos que:

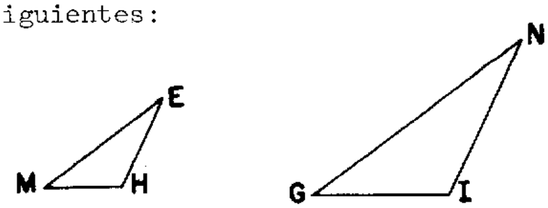
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$$

Lo cual viene siendo el primer caso de semejanza de triángulos, tratado anteriormente.

EJERCICIOS:

1.- Completa cada una de las proporciones siguientes:

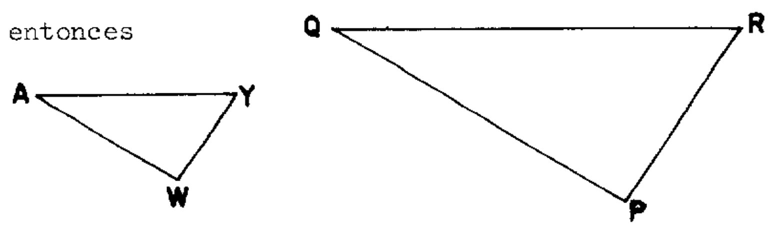
Si $\triangle$ HEM $\sim \triangle$ ING, entonces



a) $\dfrac{\overline{ME}}{\overline{GN}} = \dfrac{\overline{HM}}{\quad}$

b) $\measuredangle$ E $\cong$ $\measuredangle$

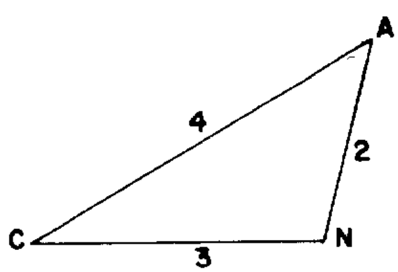
Si $\triangle$ PQR $\sim \triangle$ WAY, entonces

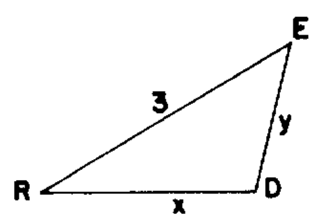


c) $\dfrac{\overline{WY}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{AW}}{\quad}$

d) $\measuredangle$R $\cong$ $\measuredangle$

2.- Si $\triangle$ CAN $\sim \triangle$ RED, escribe las proporciones apropiadas y resuélvelas para X y Y.

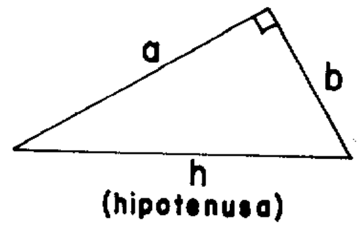


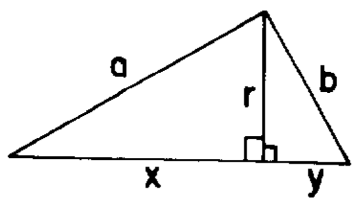


APLICACION DE LA SEMEJANZA A LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS.

Utilizando los conocimientos de semejanza, es posible demostrar el teorema de Pitágoras (En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa).

Para esto, consideremos un triángulo rectángulo al cual le asignamos h a la longitud de la hipotenusa y a los catetos les asignamos a y b respectivamente.

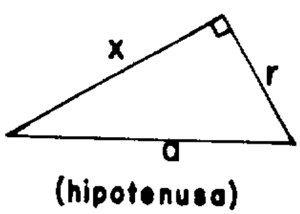


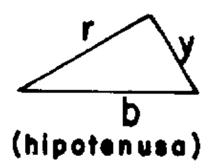


Al trazar una perpendicular a la hipotenusa y que pase por el vértice del ángulo recto, se secciona el triángulo en dos triángulos semejantes al primero.

De donde se obtienen las proporciones siguientes:

$$\frac{a}{x+y} = \frac{X}{a} \quad y \quad \frac{b}{x+y} = \frac{y}{b}$$





Desarrollando cada una tenemos:

$$a^2 = x\,(x + y) \qquad\qquad b^2 = (x + y)\,y$$

$$a^2 = x^2 + xy \qquad\qquad b^2 = xy + y^2$$

Sumando miembro a miembro tales igualdades:

$$a^2 + b^2 = (x^2 + xy) + (xy + y^2)$$

$$a^2 + b^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Factorizando el segundo miembro: $a^2 + b^2 = (x + y)^2$

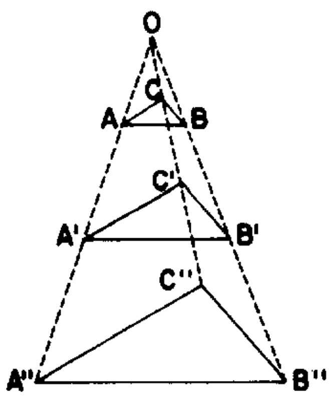
Pero, como $h = x + y$, obtenemos: $a^2 + b^2 = h^2$

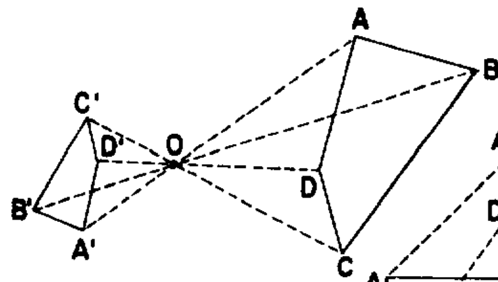
Donde queda demostrado que en el triángulo rectángulo,

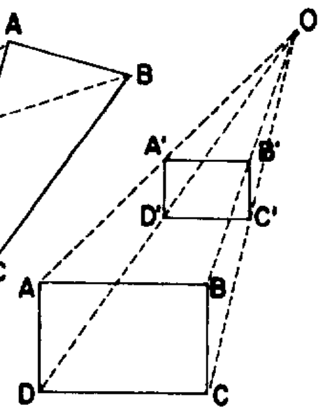
$$a^2 + b^2 = h^2$$

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

H O M O T E C I A

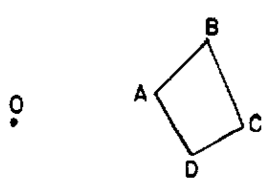




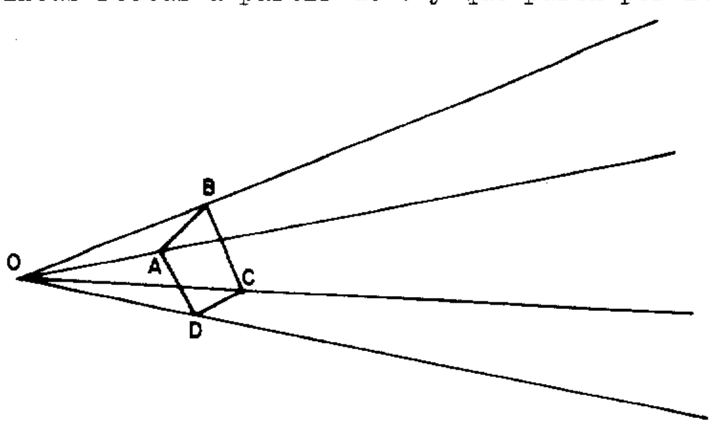


A partir de un punto "O" y un polígono, es posible trazar polígonos semejantes.

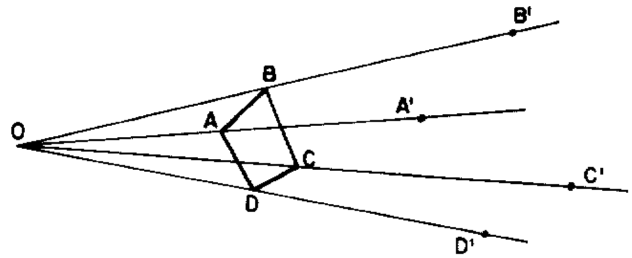
Tracemos un polígono ABCD y un punto O.



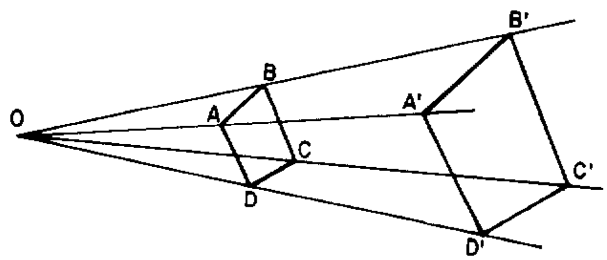
Tracemos líneas rectas a partir de O y que pasen por los vértices del polígono.



Tomemos la medida que hay desde O hasta el vértice A (con un compás es más -- preciso), ahora con centro en A y en sentido opuesto al punto O repitamos la medida, para encontrar su imagen (procede de igual forma con los demás vértices del polígono).



Por último, se van uniendo las imágenes de los vértices conforme corresponda, hasta formar la figura semejante.



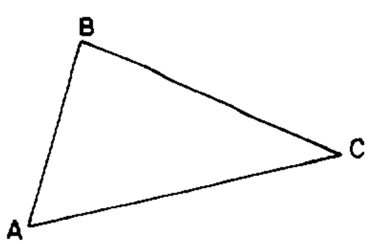
Cuando esto ocurre, estamos formando figuras homotéticas, dicho de otra forma:-

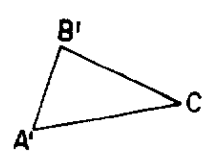
Si tenemos dos o más figuras semejantes en el plano y al trazar rectas que unan puntos correspondientes dichas rectas coinciden en un punto, decimos que existe una razón de homotecia en las figuras que, en otras palabras, es la razón de semejanza. Al punto O de incidencia se le da el nombre de centro de homotecia.

En el ejemplo anterior, dado que duplicamos la medida que hay del centro de homotecia a la figura, la razón de homotecia es K = 2

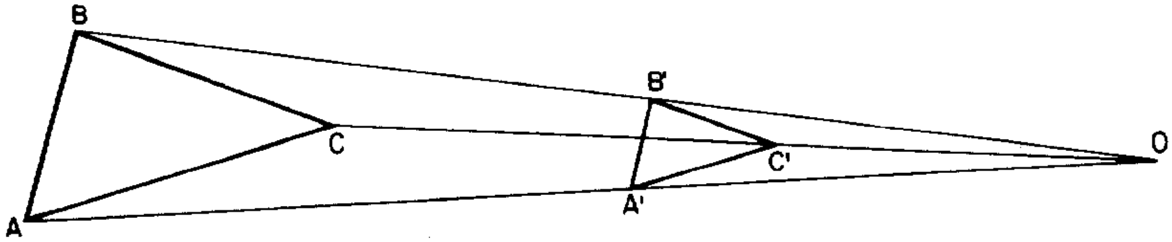
Ejemplos:

a) Consideremos dos triángulos semejantes ABC y A'B'C'



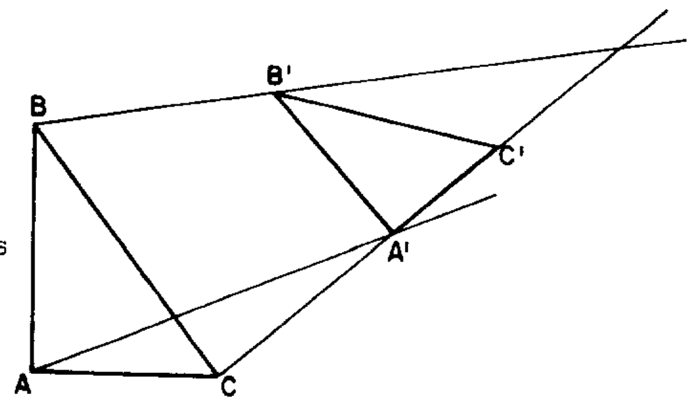


A los cuales se les traza líneas rectas, de tal manera que toquen sus vértices correspondientes. Si tales rectas coinciden en un punto, se dice que los triángulos son homotéticos y el punto O de coincidencia será el centro de homotecia.

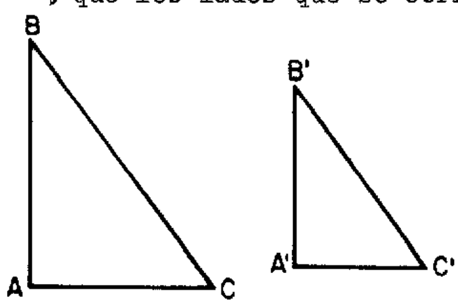


Observa que los lados correspondientes de cada figura son paralelos. Esto es, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$.

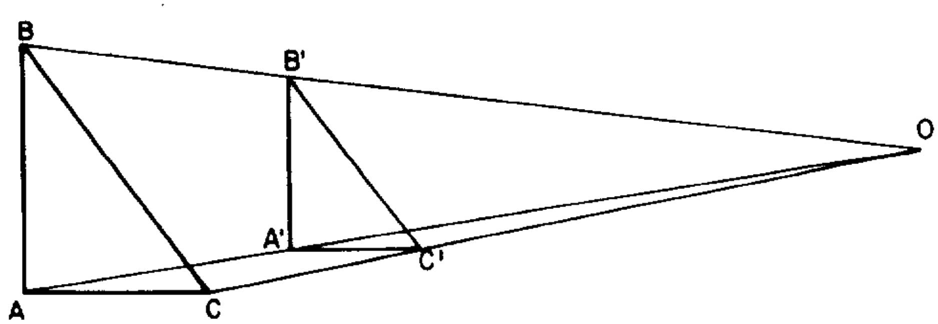
Los triángulos ABC y A' B' C' que aparecen a la derecha son semejantes pero no homotéticos. Las rectas que unen sus vértices correspondientes no coinciden en un punto común y además sus lados correspondientes no son paralelos.



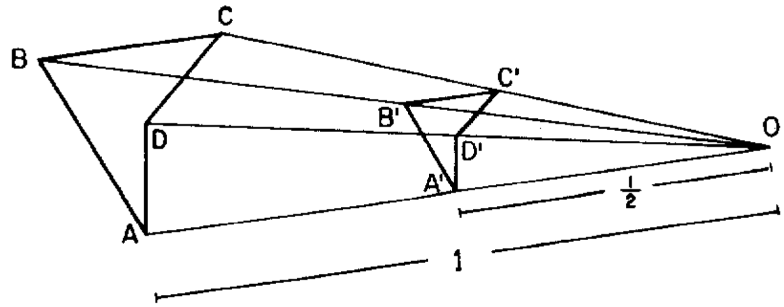
Para que dichos triángulos sean homotéticos, tenemos que hacer, mediante una rotación, que los lados que se corresponden sean paralelos.



Y, por último, si al unir los vértices todas las líneas de unión coinciden en un punto, podemos decir que las figuras son homotéticas.

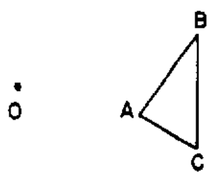


Para encontrar una figura homotética con razón de homotecia $K = \frac{1}{2}$, seguimos el mismo proceso y únicamente tomamos la mitad de la distancia que hay del centro de homotecia a la figura.

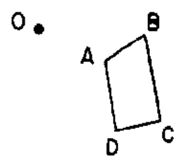


EJERCICIOS:

1.- Traza una figura homotética al triángulo ABC, con una razón de homotecia $K = 2$.

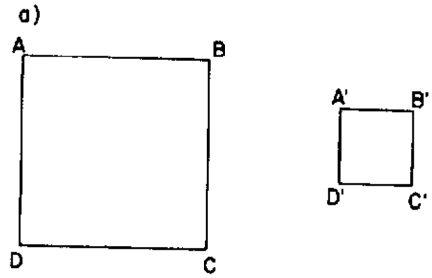


2.- Traza una figura homotética al polígono ABCD, con una razón de homotecia $K = 3$.

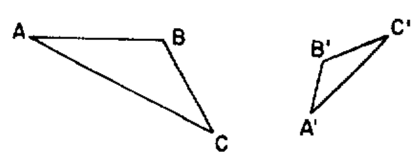


3.- Dí si los siguientes polígonos son, o no, homotéticos.

a)

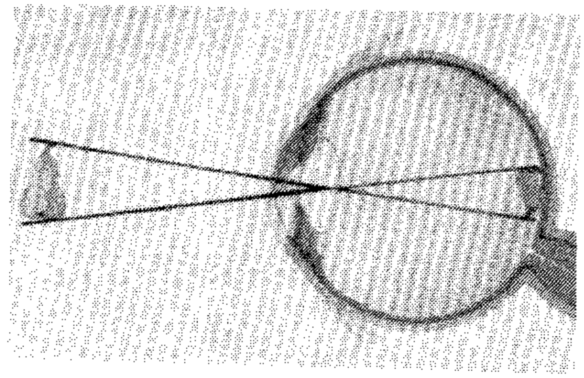


b)

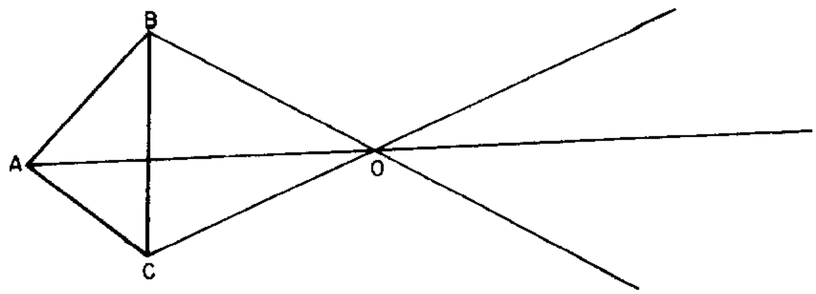


Homotecia inversa.

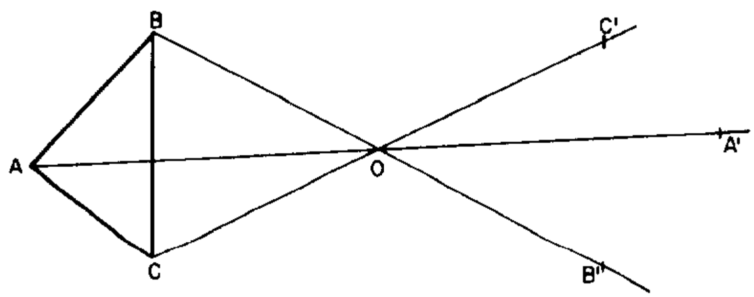
Decimos que dos figuras son homotéticamente inversas si se encuentran formadas mediante el proceso de reflexión central (recuerda los conocimientos adquiridos en la séptima unidad del segundo curso).



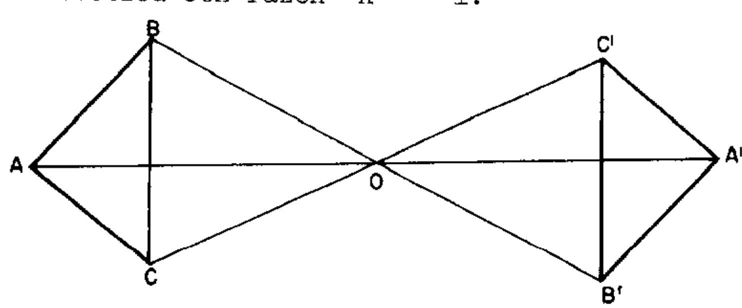
Consideremos al triángulo ABC al cual tenemos que trazar su homotética con una razón de homotecia K = - 1,. Esto significa que ahora debemos trazar líneas rectas a partir de los vértices de la figura y que pasen por el centro de homotecia, como se muestra a continuación.



Posteriormente, tomando la medida de cada uno de los vértices al centro de homotecia y en sentido contrario hacia donde se encuentra la figura, medimos desde "O" para encontrar su respectiva imagen, con razón de semejanza 1.



Por último, unimos las imágenes de los vértices conforme corresponda, para formar la figura homotética con razón K = - 1.



Comprueba que, por ser semejantes, existe proporcionalidad entre los lados correspondientes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

Y que, además, sus ángulos correspondientes son congruentes.

$$\measuredangle A \cong \measuredangle A', \measuredangle B \cong \measuredangle B', \measuredangle C \cong \measuredangle C'$$

EJERCICIOS:

1.- Traza un triángulo ABC y encuentra su homotético A'B'C' con una razón K = 2.

a) Comprueba que por ser semejantes se cumple la proporción

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

b) Comprueba que, por ser semejantes, se cumple la congruencia entre sus ángulos correspondientes.

$$\measuredangle A \cong \measuredangle A', \measuredangle B \cong \measuredangle B', \measuredangle C \cong \measuredangle C'$$

2.- Traza un polígono (con el número de lados que desees) y encuentra su homotético cuya razón sea K = - 2. Comprueba que también conserva las propiedades de la semejanza.

CONSTRUCCION DE SEGMENTOS PROPORCIONALES.

Cuarta proporcional

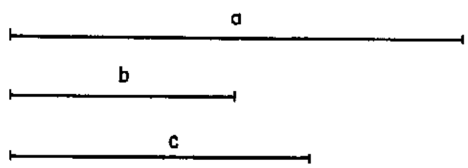
En ocaciones necesitamos trazar segmentos, que estén en una proporción dada, mediante procesos exclusivamente geométricos.

Obtener la cuarta proporcional significa: dados tres segmentos, encontrar la longitud del segmento que cumpla con una proporción dada.

Ejemplo:

Dados los segmentos a,b y c, obtener la cuarta proporcional que cumpla la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Datos:



Proporción:

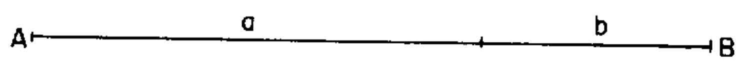
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Segmento buscado: x

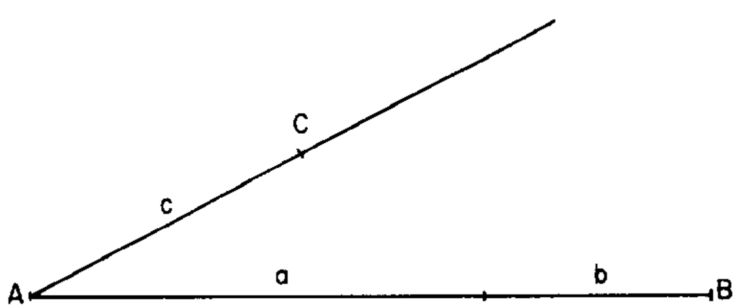
¿Cómo obtenerlo?

Para dar solución a este tipo de problemas, basaremos el procedimiento en los conocimientos adquiridos en relación al teorema de Thales.

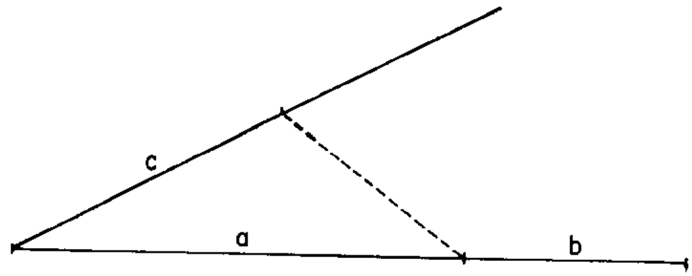
1) En una recta, trazamos segmentos adyacentes, congruentes a los segmentos "a" y "b", formando un segmento $\overline{AB}$.



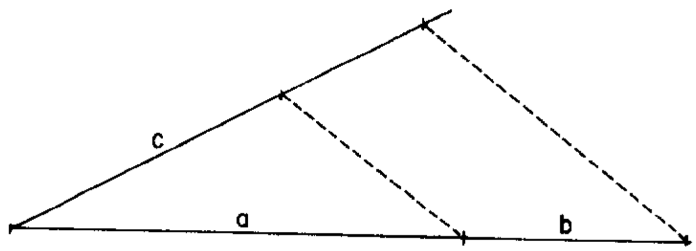
2) Formamos un ángulo en el que un lado sea la recta trazada en el inciso (a), el vértice sea el punto A y en el otro lado otra recta en la que trazamos un segmento $\overline{AC}$, congruente al segmento "c".



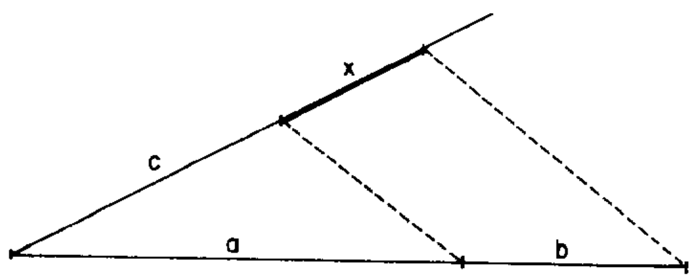
3) Trazamos un recta auxiliar que una el extremo del segmento "a" con el extremo del segmento c.



4) Por el extremo de "b", se traza una paralela a la recta auxiliar trazada anteriormente, hasta que corte a la recta que contiene a "c".



5) El segmento limitado por las paralelas trazadas es la <u>cuarta proporcional</u> buscada.

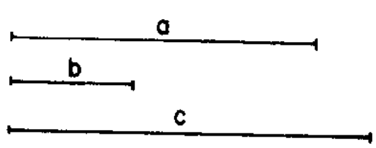


Si tienes dudas procede en forma numérica para verificar si el segmento encontrado es el correcto.

EJERCICIOS:

Obtener la cuarta proporcional, de acuerdo con los siguientes datos:

1) Datos:

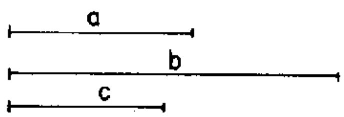


Proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

X =

2) Datos:



X=

Proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Media proporcional

3) Cuando trabajamos con proporciones, tenemos expresiones como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde:

El primero y cuarto términos (a y d) son llamados extremos de la proporción y el segundo y tercer términos (b y c) son llamados medios de la proporción.

Ejemplos:

a) De la proporción $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ los extremos son 2 y 14; los medios son 7 y 4

b) De la proporción $\frac{5}{4} = \frac{15}{x}$ los extremos son 5 y X; los medios son 4 y 15

EJERCICIOS:

1.- Considerando la proporción $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$ contesta:

a) ¿Cuáles son los extremos? ______________ Y ______________

b) ¿Cuáles son los medios? ______________ y ______________

2.- De la proporción $\frac{x}{6} = \frac{6}{9}$ contesta:

a) ¿Cuáles son los medios? ______________ y ______________

b) ¿Cuáles son los extremos? ______________ y ______________

De las proporciones:

$$\frac{3}{9} = \frac{9}{27} \qquad \text{y} \qquad \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

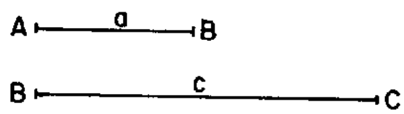
Nota que los medios en la primera proporción son los mismos números: 9. De aquí que, 9 es llamado media proporcional entre 3 y 27. En la segunda proporción, 6 es la media proporcional entre 4 y 9.

El número b es la media proporcional entre los números a y c, si y sólo si a, b y c son positivos y $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Geométricamente se tiene:

Siendo conocidos los segmentos a y c, obtener el segmento que representa la media proporcional.

Datos:



Proporción:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$$

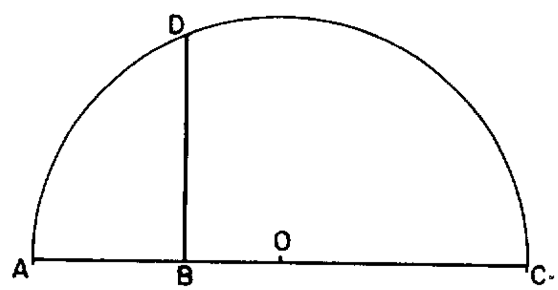
Segmento buscado: x

Procedimiento:

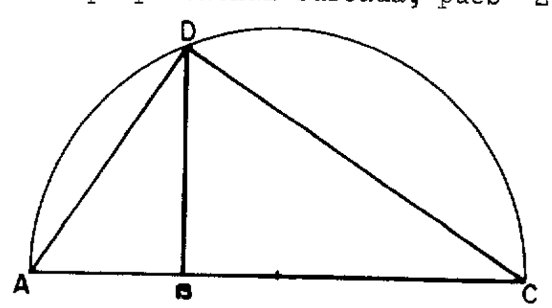
1) Tracemos los segmentos "a" y "c" colineales y adyacentes

2) Encontremos (mediante el proceso para trazar la mediatriz) el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Llamemos "O" al punto encontrado. Y tracemos, con radio $\overline{OA}$, una semicircunferencia con centro en "O".

3) Tracemos la **perpendicular** al segmento $\overline{AC}$ por el punto B. Llamemos "D" al punto de intersección de la perpendicular trazada y la semicircunferencia.



El segmento $\overline{BD}$ es la media proporcional buscada, pues Δ ADB y Δ DCB son semejantes.



Observa que, de hecho, lo que se hace es obtener la raíz cuadrada de (a)(c).

Proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$

Efectuando el producto de los extremos y de los medios tenemos:

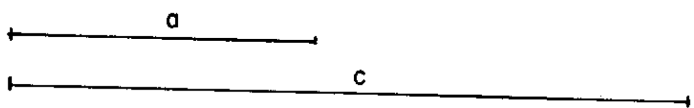
$$x^2 = (a)(c)$$

Extrayendo raíz cuadrada: $x = \sqrt{(a)(c)}$

EJERCICIOS:

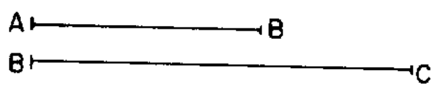
Obtener la media proporcional de las siguientes parejas de segmentos:

1)



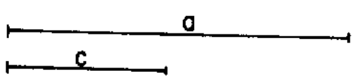
X=

2)



X=

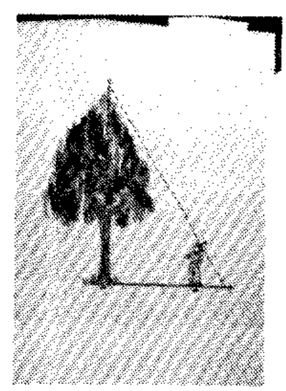
3)



X=

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS.

Una forma de saber cuál es la altura de los árboles es utilizando un espejo colocado a cierta distancia de la base del árbol, de tal manera que podamos ver la parte más alta del árbol.



Si conoces la altura que hay del suelo a tus ojos, todo lo que tienes que hacer es medir la distancia del espejo al árbol para encontrar la altura del mismo.

El punto E representa la posición del espejo, colocado de tal forma, que tus ojos vean la parte más alta del objeto a ser medido. Los dos triángulos en la figura muestran que son semejantes, dada la siguiente correspondencia:

$$\Delta\ TRE \sim \Delta\ VFE$$

Donde, los lados correspondientes a los triángulos semejantes son proporcionales.

$$\frac{\overline{TR}}{\overline{VF}} = \frac{\overline{RE}}{\overline{FE}}, \qquad \text{por lo tanto} \qquad \overline{TR} = \frac{\overline{VF} \cdot \overline{RE}}{\overline{FE}}$$

Suponiendo $\overline{VF} = 1.5$ m., $\overline{RE} = 5$m. y $\overline{FE} = 2$m.

$$\overline{TR} = \frac{(1.5)\ (5)}{2} = \frac{7.5}{2} = 3.75$$

La altura del árbol es de 3.75 m.

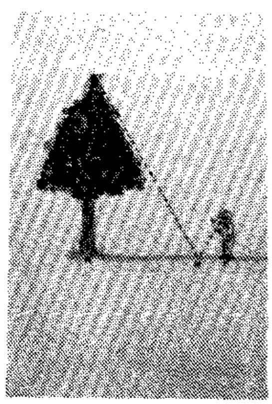
La solución de este problema se basa en la semejanza de triángulos. ¿Cómo sabemos que los triángulos que se formaron en este problema son semejantes?. Obsérvalos bien y verás que dos de sus ángulos correspondientes son congruentes:

$\measuredangle F \cong \measuredangle R$ — Son ángulos rectos

$\measuredangle VEF \cong \measuredangle TER$ — Son ángulos de incidencia y reflexión

Otra forma de encontrar la altura de un objeto, es utilizando las sombras. (Recuerda el proceso seguido por Thales, para conocer la altura de la pirámide).

EJERCICIOS:



1.- Si deseas encontrar la altura de un árbol, camina por la sombra que éste proyecta hasta que tu cabeza esté en línea con la sombra de la parte alta que proyecta el árbol.

Si tienes una estatura de 1.7 m. y la distancia que te separa del árbol es de 4 m:

a) ¿Por qué es $\Delta ESP \sim \Delta ASB$?

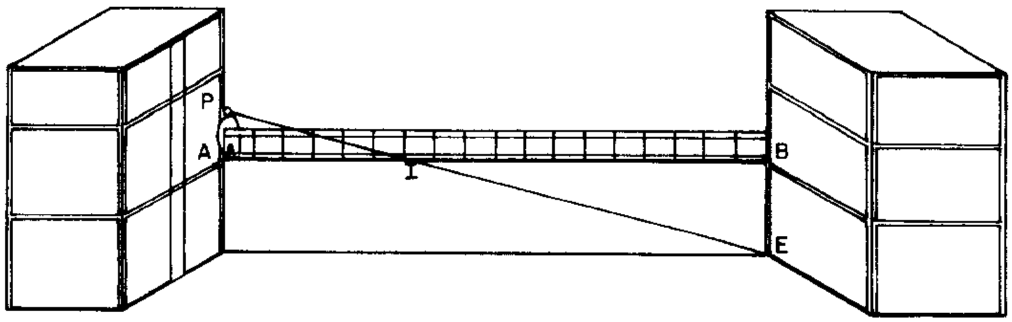
b) ¿Qué otra distancia necesitas conocer para determinar la altura del árbol?.

c) Si esa distancia es de 6 m., ¿Cuál es la altura del árbol?.

2.- Para encontrar la altura de un puente que está entre dos edificios, una persona se para en un extremo del puente y mira la base del edificio que está en el otro extremo.

a) ¿Por qué es Δ PAI $\sim$ Δ EBI?

b) Si $\overline{AI} = 6$ m., $\overline{IB} = 12$ m. y $\overline{PA} = 1.6$ m. encuentra $\overline{BE}$.



unidad 7

trigonometría

"LA TRIGONOMETRIA CONTIENE LA CIENCIA DE LA MAGNITUD ONDULATORIA CONTINUA: SIGNIFICADO DE MAGNITUD QUE ALTERNATIVAMENTE ES MAYOR Y MENOR..."

DE MORGAN, A.

I N T R O D U C C I O N.

Desde épocas remotas el ser humano se ha preocupado por conocer - aquello que le rodea, de aquí que se hayan inventado métodos e instrumentos cada vez más sofisticados para encontrar la medida de algunos objetos. La trigonometría es un método que ha sido utilizado desde - hace muchos años.

Hiparco (nacido hacia el año 160 antes de nuestra era) parece haber inventado esta ciencia práctica de medición completa de triángulos a partir de ciertos datos. Con el paso del tiempo se elaboraron tablas de senos, cosenos y tangentes de ángulos (o de arcos, ya que el arco fija el ángulo si se conoce el radio). Además, este procedimiento contiene los elementos esenciales para hallar las proporciones entre los lados de triángulos planos.

Veremos, en esta unidad, de qué manera se han relacionado los - ángulos y los lados de un triángulo rectángulo para formar lo que se ha dado en llamar Trigonometría.

Los conocimientos que de ella se tienen han servido, a los astronautas y a los navegantes, entre otros, para calcular distancias que son imposibles de medir físicamente.

OBJETIVOS PARTICULARES

* Obtendrá, a partir de un círculo de radio unidad, las funciones trigonométricas.

* Obtendrá las funciones trigonométricas, referidas a un triángulo rectángulo.

* Resolverá problemas sobre triángulos rectángulos, aplicando las funciones trigonométricas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Identificará la función seno en un círculo unitario.

- Identificará la función coseno en un círculo unitario.

- Identificará la función tangente en un círculo unitario.

- Establecerá la razón existente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

- Establecerá la razón existente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

- Establecerá la razón existente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

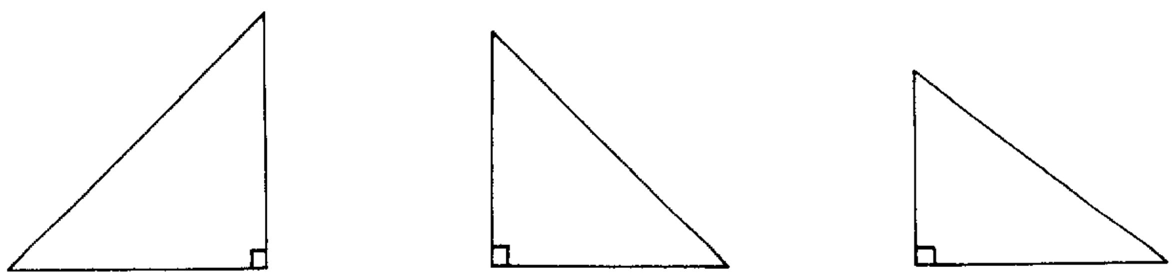
- Resolverá problemas en los que utilice las funciones trigonométricas.

EL TRIANGULO RECTANGULO.

La palabra "trigonometría" está compuesta por las palabras griegas "tri'gonon" que significa triángulo y "met'ron" que significa medición, entonces trigonometría significa "medición de triángulos."

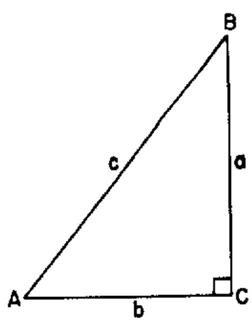
El triángulo que sirve de base a la trigonometría es el triángulo rectángulo, por ello es conveniente iniciar esta unidad considerando algunos conceptos relacionados con él.

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto, los siguientes triángulos son ejemplos de éste tipo:



Cuando tenemos un triángulo rectángulo, es común denotar sus ángulos con letras mayúsculas y con las correspondientes letras minúsculas, los lados opuestos.

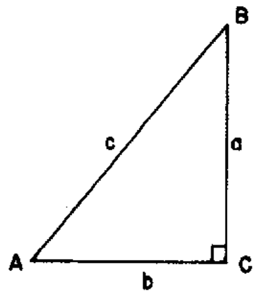
Ejemplo:

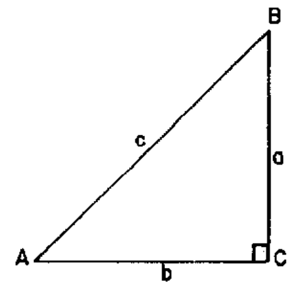


En el triángulo ABC los ángulos son: $\measuredangle$ A, $\measuredangle$ B y $\measuredangle$C.
Los lados son: a, b y c
El lado a es opuesto al $\measuredangle$ A
El lado b es opuesto al $\measuredangle$ B
El lado c es opuesto al $\measuredangle$ C

En el triángulo ABC, el lado c es la hipotenusa y los lados a y b son los catetos. El lado a es el cateto opuesto al ángulo A, mientras que el lado b es el cateto adyacente al ángulo A. De igual forma, el lado b es el cateto opuesto al ángulo B y el lado a es el cateto adyacente al ángulo B.

Ejemplos:





Cateto opuesto al ángulo A: a

Cateto adyacente al ángulo A: b

Hipotenusa: c

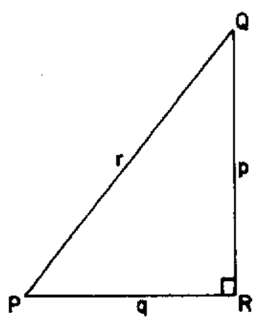
Cateto opuesto al ángulo B: b

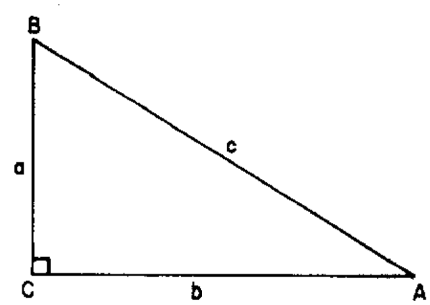
Cateto adyacente al ángulo B: a

Hipotenusa: c

EJERCICIO:

Identifica la hipotenusa y los catetos de los siguientes triángulos rectángulos.





Cateto opuesto al ángulo P: ______

Cateto adyacente al ángulo P: ______

Cateto opuesto al ángulo Q: ______

Cateto adyacente al ángulo Q: ______

Hipotenusa: ______

Cateto opuesto al ángulo A: ______

Cateto adyacente al ángulo A: ______

Cateto opuesto al ángulo B: ______

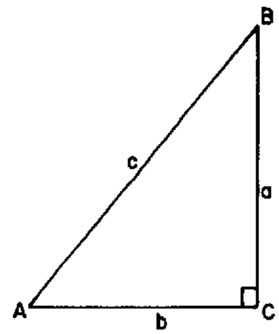
Cateto adyacente al ángulo B: ______

Hipotenusa: ______

RAZONES TRIGONOMETRICAS.

En la unidad seis se dijo que: La razón de dos números, es el cociente o el cociente indicado entre ellos.

Consideremos el triángulo rectángulo ABC.



Representemos las medidas de los lados a, b y c con estas mismas letras y encontremos todos los cocientes, donde el numerador es distinto del denominador, con esta terna de medidas.

Estos son:

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

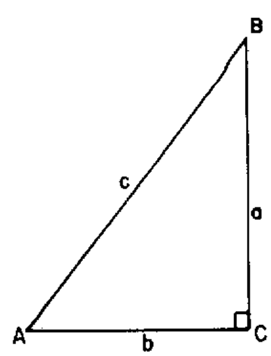
Recuerda que en la definición de razón está implícito un cierto orden, esto se debe a que la división no es conmutativa, por lo que:

$$\frac{a}{c} \neq \frac{c}{a}, \frac{b}{c} \neq \frac{c}{b} \text{ y } \frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$$

Las razones anteriores reciben el nombre de razones trigonométricas.

Para distinguir, las razones trigonométricas, a cada una de ellas se le ha dado un nombre en especial. Para ello, es conveniente aclarar para cuál de los ángulos agudos del triángulo queremos establecer estas razones.

Consideremos el siguiente triángulo:



Los nombres asignados a cada una de las razones trigonométricas son los siguientes:

Considerando el ángulo A.

Seno A = $\frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Coseno A = $\frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Tangente A = $\frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Cotangente A = $\frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Secante A = $\frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

Cosecante A = $\frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

Considerando el ángulo B.

Seno B = $\frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Coseno B = $\frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Tangente B = $\frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Cotangente B = $\frac{a}{b} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

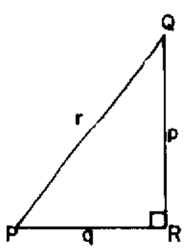
Secante B = $\frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

Cosecante B = $\frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

EJERCICIO:

Para cada uno de los triángulos rectángulos encuentra las razones solicitadas.

Ejemplo:



Seno P = $\frac{\text{Cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{p}{r}$

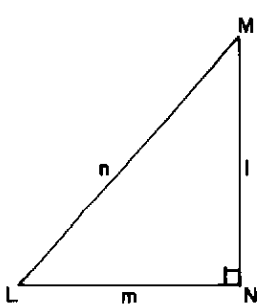
Coseno P = $\frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}} = \frac{q}{r}$

Tangente P = $\frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{p}{q}$

Cotangente P = $\frac{\text{Cat. ady.}}{\text{cat. op.}} = \frac{q}{p}$

Secante P = $\frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{r}{q}$

Cosecante P = $\frac{\text{hip}}{\text{cat. op.}} = \frac{r}{p}$



Seno L = ________ = ________

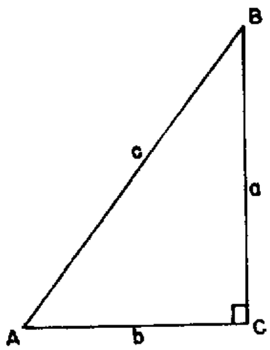
Coseno L = ______ = ________

Tangente L = ___ = _______

Cotangente L = ________ = ________

Secante L = ________ = ________

Cosecante L = ________ = ________



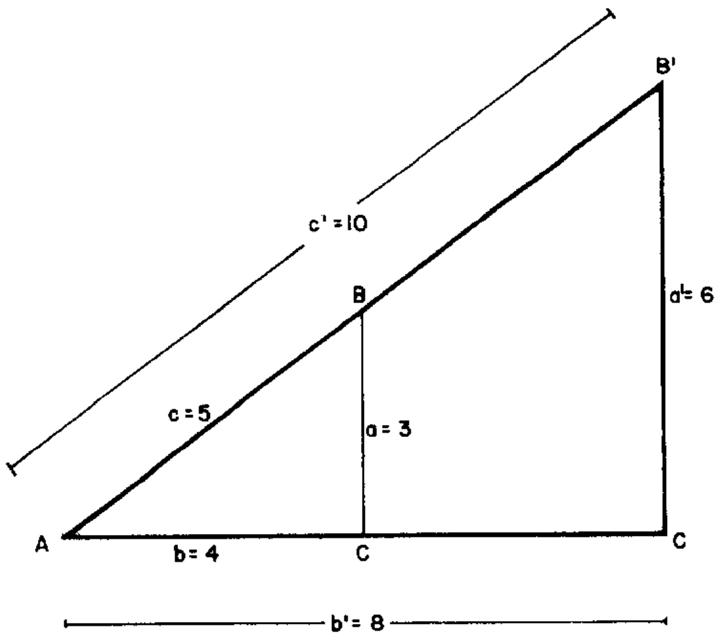
Seno B = ________ = ________ Cotangente B = ________ = ________

Coseno B = ______ = ________ Secante B = ________ = ________

Tangente B = ____ = ________ Cosecante B = ________ = ________

VALORES DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS.

Consideremos la siguiente figura.



En la figura podemos apreciar dos triángulos rectángulos el Δ ABC y el Δ AB'C'. Los triángulos tienen sus ángulos correspondientes congruentes por lo que son semejantes.

Obtengamos las razones trigonométricas de estos dos triángulos:

Para el Δ ABC

$$\text{Seno A} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\text{Coseno A} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Para el Δ AB'C'

$$\text{Seno A} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\text{Coseno A} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$\text{Tangente A} = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \dfrac{3}{4} = 0.75$ $\qquad$ $\text{Tangente A} = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \dfrac{6}{8} = 0.75$

$\text{Cotangente A} = \dfrac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}} = \dfrac{4}{3} = 1.33$ $\qquad$ $\text{Cotangente A} = \dfrac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}} = \dfrac{8}{6} = 1.33$

$\text{Secante A} = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. ady.}} = \dfrac{5}{4} = 1.25$ $\qquad$ $\text{Secante A} = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. ady.}} = \dfrac{10}{8} = 1.25$

$\text{Cosecante A} = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}} = \dfrac{5}{3} = 1.66$ $\qquad$ $\text{Cosecante A} = \dfrac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}} = \dfrac{10}{6} = 1.66$

Se observa que los valores de las razones trigonométricas para los dos triángulos es el mismo. Esto se debe a que: como los triángulos son semejantes, los lados correspondientes son proporcionales. Es decir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Y de las igualdades anteriores podemos concluir que:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Esto significa que las razones trigonométricas, en triángulos semejantes, no dependen del tamaño del triángulo, sino del ángulo considerado.

En consecuencia: La razón que hay entre los lados de un triángulo rectángulo esta en función del ángulo.

Sabemos que las razones que hay entre los lados de un triángulo rectángulo se expresan de la siguiente forma:

$\text{Seno A} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\qquad$ $\text{Cosecante A} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

$\text{Coseno A} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\qquad$ $\text{Secante A} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

$\text{Tangente A} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ $\qquad$ $\text{Cotangente A} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Observando las razones establecidas podemos darnos cuenta que; las razones que aparecen en la columna de la derecha son respectivamente recíprocas a las de la columna de la izquierda (recuerda que el recíproco de a/b es b/a) de ahí que, conociendo una, es posible conocer la otra, por tal razón, solo trabajaremos, en esta unidad, con las funciones de una de las dos columnas;las más usuales son: Seno, Coseno y Tangente.

Por comodidad utilizaremos las siguientes abreviaturas para cada una de las razones trigonométricas.

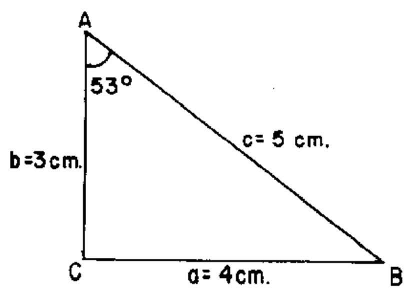
Seno A =	sen A	Cotangente A =	cot A
Coseno A =	cos A	Secante A =	sec A
Tangente A =	tan A	Cosecante A =	csc A

LA FUNCION SENO

Sabemos que el seno de un ángulo cualquiera al que denotaremos con la letra griega θ, está dado por la siguiente razón:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Procedamos a encontrar el valor del seno para algunos ángulos en particular. Por ejemplo, consideremos el siguiente triángulo rectángulo.



En el triángulo rectángulo ABC se aprecian las siguientes igualdades:
$A = 53°$

El cateto opuesto al ángulo A es: $a = 4$ cm.
La hipotenusa es: $c = 5$ cm.

Con los datos anteriores podemos encontrar el valor del seno para un ángulo de 53°.

$$\text{Sen } 53° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

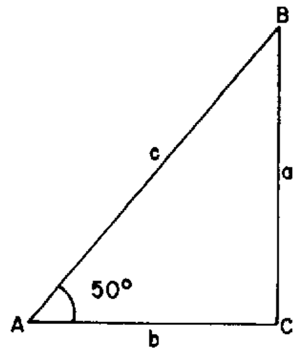
$$\text{Sen } 53° = 0.8$$

Podemos encontrar el valor del seno de cualquier ángulo comprendido entre 0° y 90° utilizando para ello cualquier triángulo que tenga un ángulo agudo igual al ángulo del cual nos interesa conocer el valor del seno, esto es, dado un ángulo podemos construir un triángulo rectángulo que tenga un ángulo interior de igual medida al ángulo dado.

Por ejemplo:

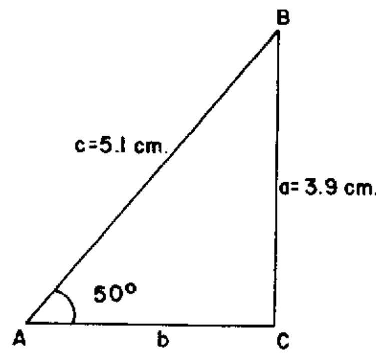
Para obtener el valor del seno para un ángulo de 50°, se puede seguir el siguiente procedimiento.

1. Trazamos un triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo igual al ángulo del cual nos interesa saber el valor del seno. En este caso de 50°.



2. Medimos la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo.
En este ejemplo:

$$c = 5.1$$
$$a = 3.9$$



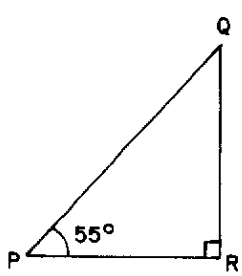
3. Aplicamos la razón correspondiente obteniendo de esta forma el valor del seno del ángulo solicitado.

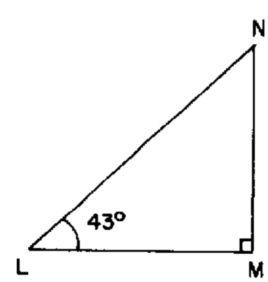
$$\text{sen } 50^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3.9}{5.1} = 0.76$$

$$\text{sen } 50^\circ = 0.76$$

EJERCICIO.

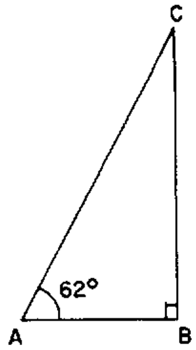
Utilizando el procedimiento anterior,obtén el seno del ángulo indicado en cada uno de los siguientes triángulos.

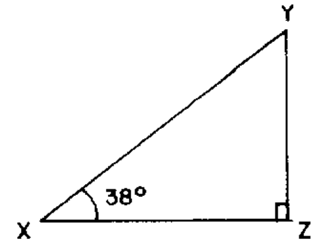




sen 55° = ________________

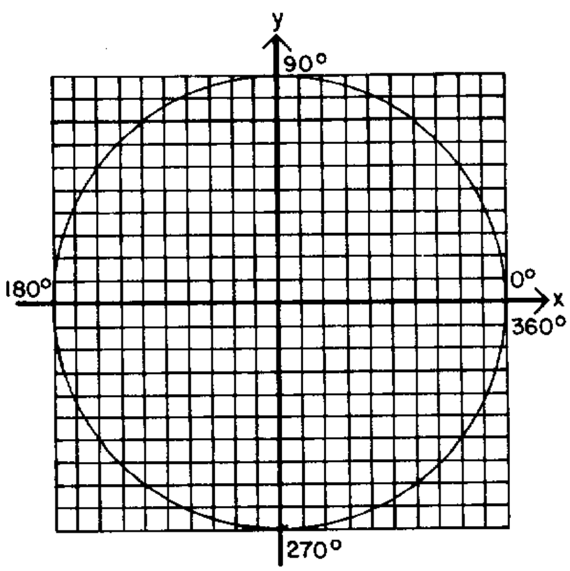
sen 43° = ________________





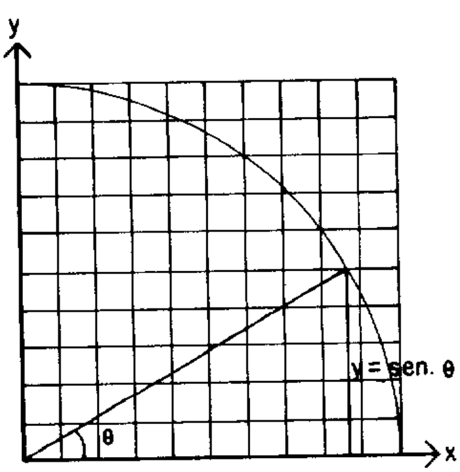
sen 62° = ________ sen 38° = ________

Considerando que es más práctico efectuar divisiones entre la unidad, trabajemos un círculo de radio 1 al cual llamaremos círculo unitario o círculo trigonométrico, en el que trazaremos los triángulos rectángulos. Para ello, consideraremos un plano cartesiano con origen en el centro del círculo. En ambos ejes, representaremos a los números reales.



El círculo queda, entonces, seccionado en cuatro partes a las que llamaremos cuadrantes y que numeraremos en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj.

Primer cuadrante de 0° a 90°
Segundo cuadrante de 90° a 180°
Tercer cuadrante de 180° a 270°
Cuarto cuadrante de 270° a 360°
Para los propósitos del texto, solo trabajaremos con el primer cuadrante.



Dado que la hipotenusa es el radio del círculo, su valor es 1, entonces:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{1} = \text{cateto opuesto}$$

En consecuencia para obtener el valor de sen θ, basta observar los valores que toma el cateto opuesto, es decir; el valor de "y" en el punto donde la hipotenusa intersecta a la circunferencia.

Del círculo unitario podemos obtener los valores del seno para cualquier ángulo.

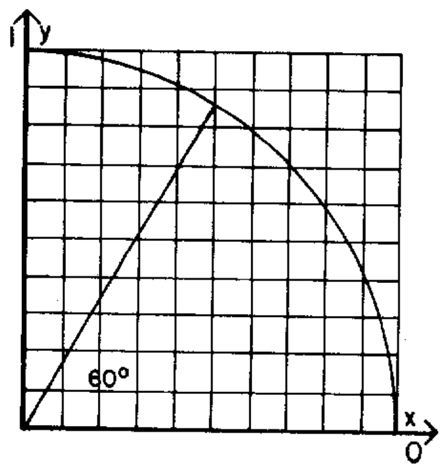
Ejemplo:

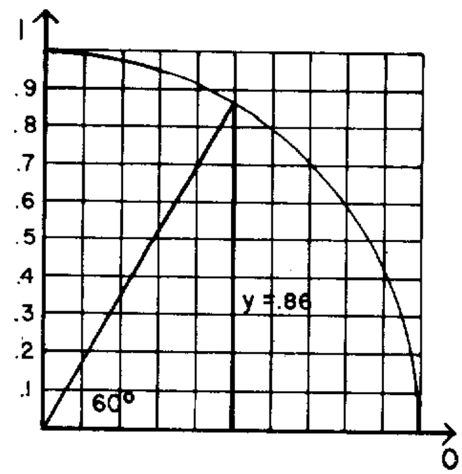
Obtengamos el valor del seno de un ángulo de 60° utilizando para ello el círculo trigonométrico.

Para ello se puede seguir el siguiente procedimiento.

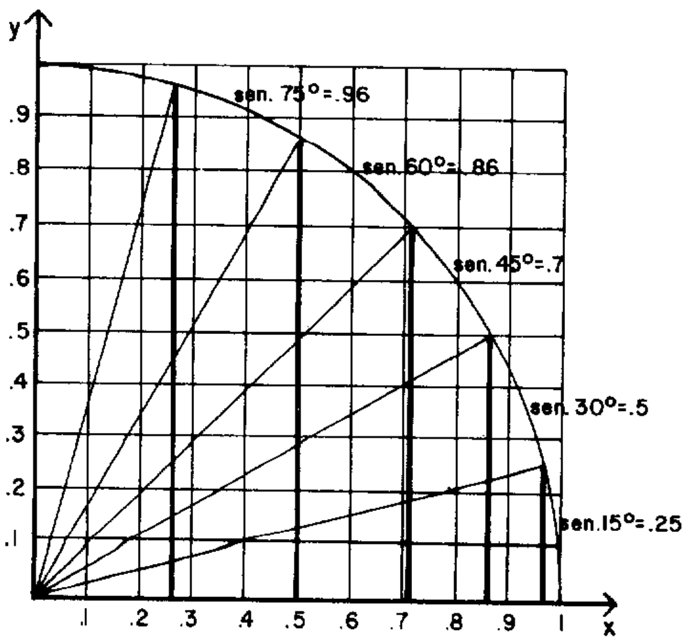
1. Trazamos un ángulo central de 60° de forma que su lado inicial coincida con el semieje positivo (x).

2. Obtenemos el valor de la ordenada del punto de intersección del ángulo con el arco de circunferencia. El valor de la ordenada es .86; por lo tanto: seno 60°= 0.86





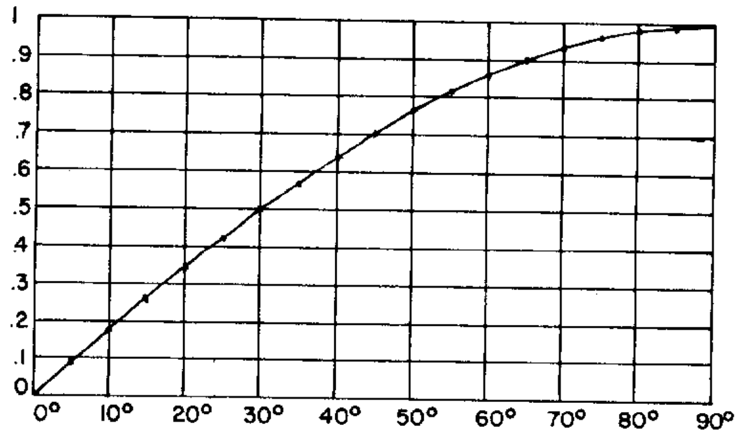
Observemos que pasa con los valores del seno para ángulos de 0° a 90°



A medida que el ángulo crece de 0° a 90° el valor de "y" aumenta. Cuando el ángulo vale 90°, "y" toma el valor de 1
A medida que el ángulo decrece de 90° a 0° el valor de "y" disminuye.
Cuando el ángulo vale 0°, "y" toma el valor de 0.

A cada ángulo de 0° a 90°, le corresponde un número real de 0 a 1, esto es, el seno de un ángulo es una función que tiene como dominio los ángulos comprendidos entre 0° y 90° y como contradominio los números reales.

La gráfica para valores de 0° a 90° de la función seno es la siguiente:



Para evitar estar recurriendo al círculo trigonométrico para obtener el valor del seno de un ángulo determinado existen "Tablas de funciones trigonométricas" que proporcionan los valores del seno de un ángulo.

A continuación aparece una tabla en la que podemos obtener los valores de la función seno para ángulos comprendidos entre 0° y 90°.

S E N O

θ	0'	10'	20'	30'	40'	50	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	.0000	.0029	.0058	.0087	.0116	.0145	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0202	.0233	.0262	.0291	.0320	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	3	6	9	12	14	17	20	23	26
5°	.0872	.0901	.0929	.0958	.0987	.1016	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.1334	.1363	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	3	6	9	12	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	3	6	9	12	14	17	20	23	26
10°	.1736	.1765	.1794	.1822	.1851	.1880	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	3	6	8	11	14	17	20	23	26
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	3	6	8	11	14	17	20	23	26
15°	.2588	.2616	.2644	.2672	.2700	.2728	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	.3420	.3448	.3475	.3502	.3529	.3557	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25°	.4226	.4253	.4279	.4305	.4331	.4358	3	5	8	11	13	16	18	21	24
26	.4384	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	.5000	.5025	.5050	.5075	.5100	.5125	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35°	.5736	.5760	.5783	.5807	.5831	.5854	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	.6428	.6450	.6472	.6494	.6517	.6539	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6884	.6905	.6926	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	2	4	6	8	10	12	15	17	19

S E N O

θ	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	.7071	.7092	.7112	.7133	.7153	.7173	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	.7660	.7679	.7698	.7716	.7735	.7753	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55°	.8192	.8208	.8225	.8241	.8258	.8274	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	2	3	5	6	8	10	11	13	14
57	.8387	.8403	.8418	.8434	.8450	.8465	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	.8480	.8496	.8511	.8526	.8542	.8557	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	.8572	.8587	.8601	.8616	.8631	.8646	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60°	.8660	.8675	.8689	.8704	.8718	.8732	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051	1	3	4	5	6	8	9	10	11
65°	.9063	.9075	.9088	.9100	.9112	.9124	1	2	4	5	6	7	8	10	11
66	.9135	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194	1	2	3	5	6	7	8	9	10
67	.9205	.9216	.9228	.9239	.9250	.9261	1	2	3	4	6	7	8	9	10
68	.9272	.9283	.9293	.9304	.9315	.9325	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	.9336	.9346	.9356	.9367	.9377	.9387	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70°	.9397	.9407	.9417	.9426	.9436	.9446	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555	1	2	3	3	4	5	6	7	8
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75°	.9659	.9667	.9674	.9681	.9689	.9696	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	.9848	.9853	.9858	.9863	.9868	.9872	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	0	1	1	2	2	3	3	4	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	0	1	1	1	2	2	2	2	3
85°	.9962	.9964	.9967	.9969	.9971	.9974	0	0	1	1	1	1	2	2	2
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	0	0	1	1	1	1	1	1	1
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	0	0	0	1	1	1	1	1	1
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	0	0	0	0	0	1	1	1	1
89	.9998	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90°	1.0000														

La forma de utilizar la tabla es la siguiente:

Ejemplos:

1. Hallar el valor de sen 15° 10'.
   En la tabla, se localiza 15° en la columna cuyo encabezado es θ, se sigue por ese mismo renglón hasta la columna cuyo encabezado es 10; en la intersección del renglón y la columna encontramos el valor buscado, en este caso: .2616

S E N O

θ	0'	10'	20'	30'	40'	50	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	.0000	.0029	.0058	.0087	.0116	.0145	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0202	.0233	.0262	.0291	.0320	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	3	6	9	12	14	17	20	23	26
5°	.0872	.0901	.0929	.0958	.0987	.1016	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.1334	.1363	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	3	6	9	12	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	3	6	9	12	14	17	20	23	26
10°	.1736	.1765	.1794	.1822	.1851	.1880	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15°	.2588	.2616	.2644	.2672	.2700	.2728	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	.3420	.3448	.3475	.3502	.3529	.3557	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25°	.4226	.4253	.4279	.4305	.4331	.4358	3	5	8	11	13	16	18	21	24
26	.4384	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	3	5	8	10	13	16	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	3	5	8	10	13	15	18	21	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	.5000	.5025	.5050	.5075	.5100	.5125	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35°	.5736	.5760	.5783	.5807	.5831	.5854	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	.6428	.6450	.6472	.6494	.6517	.6539	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6884	.6905	.6926	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	2	4	6	8	10	12	15	17	19

2. Hallar el valor de sen 40° 35'.
   En la tabla, se localiza 40° en la columna cuyo encabezado es θ, se sigue por ese mismo renglón hasta la columna cuyo encabezado es 30'. De esta forma obtenemos el valor .6494 que corresponde a un ángulo de 40° 30'. Siguiendo por el mismo renglón localizamos el valor que corresponde a 5', y lo sumamos al primer valor localizado

Sen	40° 30'	.6494
Sen	5'	11
		.6505

Sen 40° 35' = .6505

S E N O

θ	0'	10'	20'	30'	40'	50	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	.0000	.0029	.0058	.0087	.0116	.0145	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0202	.0233	.0262	.0291	.0320	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	3	6	9	12	14	17	20	23	26
5°	.0872	.0901	.0929	.0958	.0987	.1016	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.1334	.1363	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	3	6	9	12	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	3	6	9	12	14	17	20	23	26
10°	.1736	.1765	.1794	.1822	.1851	.1880	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15°	.2588	.2616	.2644	.2672	.2700	.2728	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	.3420	.3448	.3475	.3502	.3529	.3557	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25°	.4226	.4253	.4279	.4305	.4331	.4358	3	5	8	11	13	16	18	21	24
26	.4384	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	3	5	8	10	13	16	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	3	5	8	10	13	15	18	21	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	.5000	.5025	.5050	.5075	.5100	.5125	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35°	.5736	.5760	.5783	.5807	.5831	.5854	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	.6428	.6450	.6472	.6494	.6517	.6539	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6884	.6905	.6926	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	2	4	6	8	10	12	15	17	19

EJERCICIO:

Utiliza la tabla anterior para encontrar el valor de las funciones indicadas.

1) Sen 40° 30' = ____________ 6) Sen 18° 20' = ____________

2) Sen 39° 40' = ____________ 7) Sen 13° 12' = ____________

3) Sen 89° 36' = ____________ 8) Sen 15° 16' = ____________

4) Sen 60° 30' = ____________ 9) Sen 17° 12' = ____________

5) Sen 45° 40' = ____________ 10) Sen 15° 13' = ____________

Podemos utilizar también la tabla anterior con el fin de conocer el ángulo al cuál corresponde determinado valor del seno.

Ejemplo:

1. Deseamos conocer el valor del ángulo para el cual la función seno toma un valor de .6450.
   Para ello localizamos en la tabla de las funciones seno este valor. Encontramos que este valor corresponde a un ángulo de 40° 10'.

S E N O

θ	0'	10'	20'	30'	40'	50	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	.0000	.0029	.0058	.0087	.0116	.0145	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0202	.0233	.0262	.0291	.0320	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	3	6	9	12	14	17	20	23	26
5°	.0872	.0901	.0929	.0958	.0987	.1016	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.1334	.1363	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	3	6	9	12	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	3	6	9	12	14	17	20	23	26
10°	.1736	.1765	.1794	.1822	.1851	.1880	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15°	.2588	.2616	.2644	.2672	.2700	.2728	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	.3420	.3448	.3475	.3502	.3529	.3557	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25°	.4226	.4253	.4279	.4305	.4331	.4358	3	5	8	11	13	16	18	21	24
26	.4384	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	.5000	.5025	.5050	.5075	.5100	.5125	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35°	.5736	.5760	.5783	.5807	.5831	.5854	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	.6428	.6450	.6472	.6494	.6517	.6539	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6884	.6905	.6926	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	2	4	6	8	10	12	15	17	19

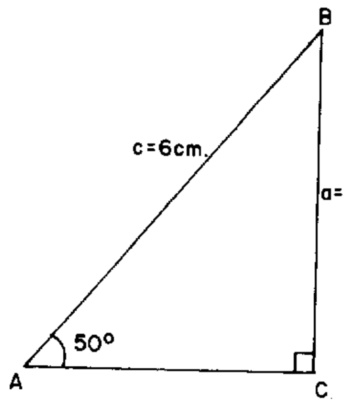
Con la función seno definida de la siguiente forma:

$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Podemos resolver problemas donde intervenga un triángulo rectángulo, un ángulo Θ, el cateto opuesto al ángulo Θ y la hipotenusa.

Ejemplos:

a) ¿Cuánto mide el cateto a del siguiente triángulo rectángulo?



$$\text{Sen A} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Sustituimos los valores conocidos

$$\text{Sen } 50° = \frac{a}{6 \text{ cm.}}$$

Buscamos en la tabla el valor que corresponde a sen 50° y sustituimos este valor en la igualdad.

$$.7660 = \frac{a}{6 \text{ cm.}}$$

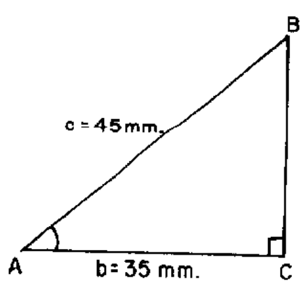
Despejemos la incógnita

$$a = 6 \text{ cm } (.7660)$$

Realizamos el producto y obtenemos el valor del cateto desconocido

$$a = 4.596 \text{ cm.}$$

b) ¿Cuánto mide el ángulo B del siguiente triángulo rectángulo?



La función que relaciona el ángulo B con el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa es el seno.

$$\text{Sen B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{35}{45}$$

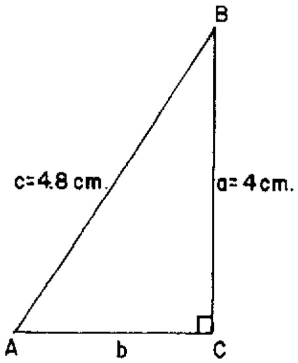
$$\text{Sen B} = 0.7777$$

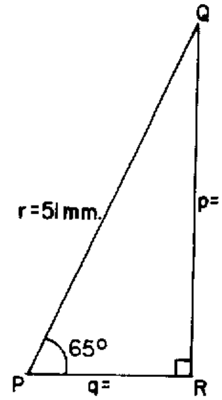
De esta forma hemos obtenido el valor del seno para el ángulo B. Buscamos en la tabla a que ángulo corresponde este valor y encontramos que:

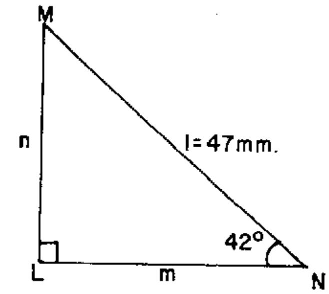
$$\measuredangle B = 51°$$

EJERCICIO:

Encuentra el valor solicitado en cada uno de los siguientes triángulos.



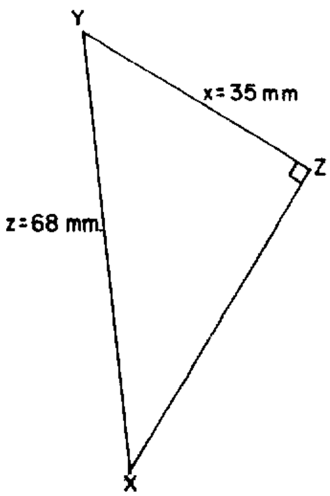


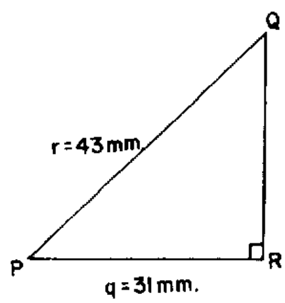


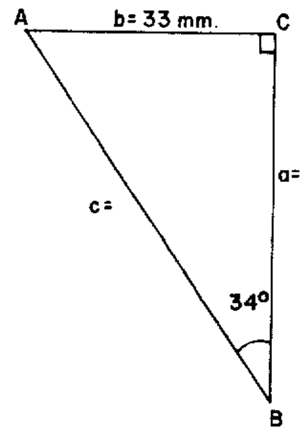
∢ A = ________

r = ________

n = ________







∢ X = ________

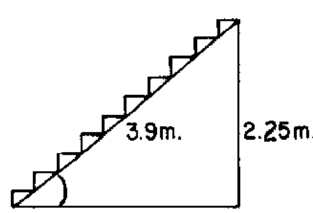
∢ Q = ________

c = ________

La función seno nos puede ayudar a resolver problemas de tipo práctico.

Por ejemplo: ¿Cuál será el ángulo de la pendiente de una escalera, si la medida de la rampa sobre la que van a colocar los escalones es de 3.90 m. y la altura de un piso a otro es de 2.25 m?

Representamos los datos del problema por medio de un dibujo.



Observamos que se ha formado un triángulo rectángulo, en él se conocen el cateto opuesto al ángulo A y la hipotenusa del triángulo. Esto nos permite utilizar la función seno para encontrar el valor del ángulo.

Sabemos que: $\text{Sen A} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$; en este caso

$$\text{Sen A} = \frac{2.25}{3.90}$$

$$\text{Sen A} = 0.5769$$

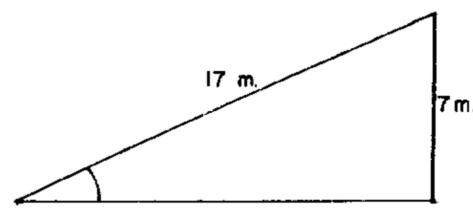
Buscamos en la tabla correspondiente este valor y encontramos que corresponde a un ángulo de $35^\circ\ 14'$.

El ángulo de inclinación de la escalera es de $35^\circ\ 14'$.

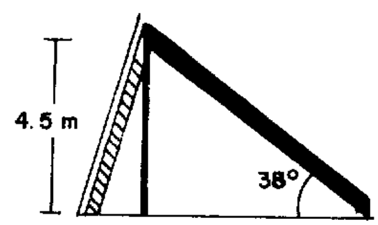
EJERCICIO:

Resuelve los siguientes problemas:

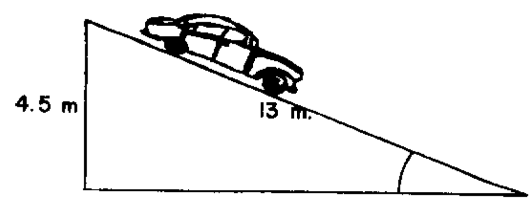
1. Se ha instalado un alambre de 17 m. de largo desde el suelo hasta el extremo de un poste de 7 m. de altura. Encuentra el ángulo que forman el suelo y el alambre.



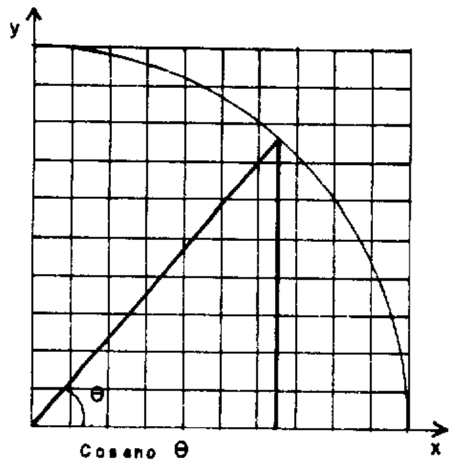
2. Se quiere construir una "resbaladilla" de manera que forme un ángulo de 38° con el suelo. Si la altura deberá ser de 4.5 m, ¿cuál deberá ser la medida de la "resbaladilla"



3. La rampa de entrada a un estacionamiento mide 13 m. de longitud y sube a una altura de 4.5 m ¿cuál es el ángulo de inclinación con respecto a la horizontal de esa rampa?



Del círculo trigonométrico también podemos obtener los valores del coseno para cualquier ángulo.



Sabemos que: coseno $\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Dado que la hipotenusa es el radio del círculo, su valor es 1, entonces:

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{cateto adyacente}$$

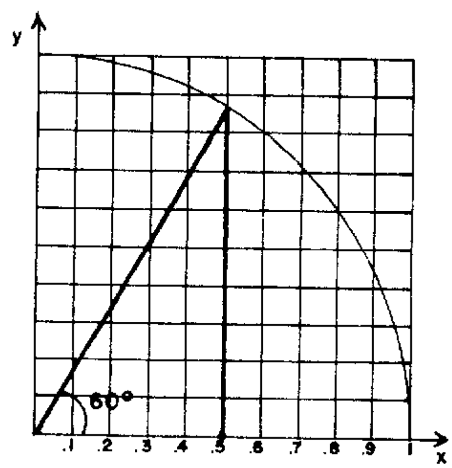
En consecuencia, para obtener el valor de coseno θ, basta observar los valores que toma el cateto adyacente, es decir: el valor de x en el punto donde la hipotenusa intersecta a la circunferencia.

Ejemplo:

Obtengamos el valor del coseno de un ángulo de 60° utilizando para ello el círculo trigonométrico.

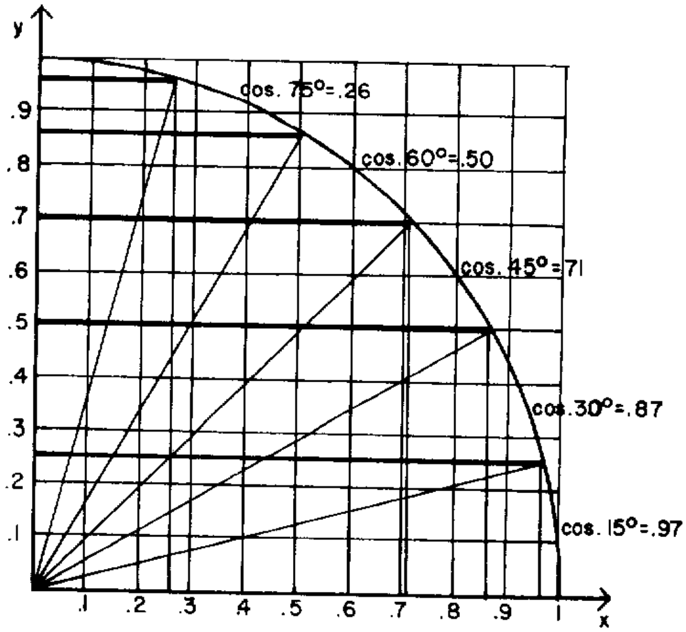
Se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Trazamos el ángulo de forma que su vértice coincida con el centro de la circunferencia y su lado inicial coincida con el semieje x positivo
2. Obtenemos el valor de la abscisa del punto de intersección de la hipotenusa con la circunferencia.



El valor de la abscisa es de .5 por lo tanto el coseno de 60° = .5.

Observemos qué pasa con el valor del coseno en tanto el ángulo θ aumenta de 0 a 90°.



A medida que el ángulo crece de 0° a 90° el valor de "x" disminuye. Cuando el ángulo vale 90° "x" toma el valor de 0.

A medida que el ángulo decrece de 90° a 0° el valor de "x" aumenta. Cuando el ángulo vale 0°, "x" toma el valor de 1.

EJERCICIO:

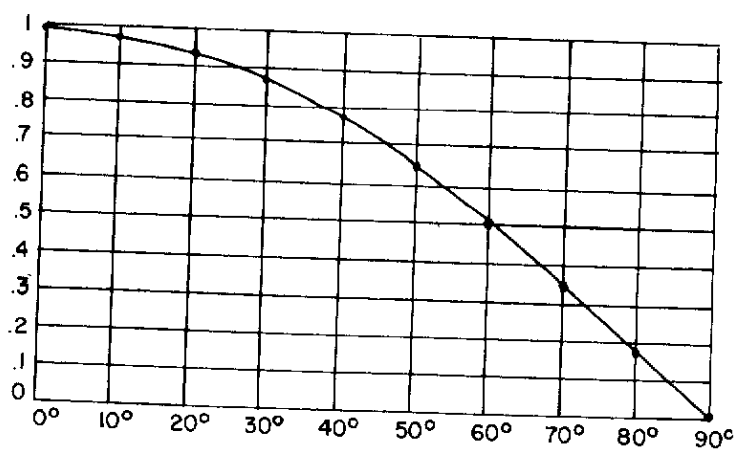
Responde las siguientes preguntas:

¿Por qué el coseno es una función? ________________________________.

¿Cuál es el dominio de la función coseno? ____________________________.

¿Cuál es el contradominio de la función coseno? _______________________.

La gráfica de la función coseno es la siguiente:



Al igual que para el seno, para el coseno existen "Tablas de funciones trigonométricas" que proporcionan los valores del coseno de un ángulo en forma más aproximada de la que se puede obtener con el círculo trigonométrico.

A continuación aparece una tabla que nos permitirá obtener los valores de la función coseno para ángulos comprendidos entre 0° y 90°.

COSENO

θ	0	10'	20'	30'	40'	50	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	.9994	.9993	.9992	.9990	.9989	.9988	0	0	0	1	1	1	1	1	1
3	.9986	.9985	.9983	.9981	.9980	.9978	0	0	1	1	1	1	1	1	1
4	.9976	.9974	.9971	.9969	.9967	.9964	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5°	.9962	.9959	.9957	.9954	.9951	.9948	0	1	1	1	2	2	2	2	3
6	.9945	.9942	.9939	.9936	.9932	.9929	0	1	1	1	2	2	2	3	3
7	.9925	.9922	.9918	.9914	.9911	.9907	0	1	1	2	2	2	3	3	3
8	.9903	.9899	.9894	.9890	.9886	.9881	0	1	1	2	2	3	3	3	4
9	.9877	.9872	.9868	.9863	.9859	.9853	0	1	1	2	2	3	3	4	4
10°	.9848	.9843	.9838	.9833	.9827	.9822	1	1	2	2	3	3	4	4	5
11	.9816	.9811	.9805	.9799	.9793	.9787	1	1	2	2	3	3	4	5	5
12	.9781	.9775	.9769	.9763	.9757	.9750	1	1	2	3	3	4	4	5	6
13	.9744	.9737	.9730	.9724	.9717	.9710	1	1	2	3	3	4	5	5	6
14	.9703	.9696	.9689	.9681	.9674	.9667	1	1	2	3	4	4	5	6	7
15°	.9659	.9652	.9644	.9636	.9628	.9621	1	2	2	3	4	5	5	6	7
16	.9613	.9605	.9596	.9588	.9580	.9572	1	2	2	3	4	5	6	7	7
17	.9563	.9555	.9546	.9537	.9528	.9520	1	2	3	3	4	5	6	7	8
18	.9511	.9502	.9492	.9483	.9474	.9465	1	2	3	4	5	6	6	7	8
19	.9455	.9446	.9436	.9426	.9417	.9407	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20°	.9397	.9387	.9377	.9367	.9356	.9346	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	.9336	.9225	.9315	.9304	.9293	.9283	1	2	3	4	5	6	7	9	10
22	.9272	.9261	.9250	.9239	.9228	.9216	1	2	3	4	6	7	8	9	10
23	.9205	.9194	.9182	.9171	.9159	.9147	1	2	3	5	6	7	8	9	10
24	.9135	.9124	.9112	.9100	.9088	.9075	1	2	4	5	6	7	8	10	11
25°	.9063	.9051	.9038	.9026	.9013	.9001	1	3	4	5	6	8	9	10	11
26	.8988	.8975	.8962	.8949	.8936	.8923	1	3	4	5	6	8	9	10	11
27	.8910	.8897	.8884	.8870	.8857	.8843	1	3	4	5	7	8	9	11	12
28	.8829	.8816	.8802	.8788	.8774	.8760	1	3	4	6	7	8	10	11	12
29	.8746	.8732	.8718	.8704	.8689	.8675	1	3	4	6	7	9	10	11	13
30°	.8660	.8646	.8631	.8616	.8601	.8587	1	3	4	6	7	9	10	12	13
31	.8572	.8557	.8542	.8526	.8511	.8496	2	3	5	6	8	9	11	12	14
32	.8480	.8465	.8450	.8434	.8418	.8403	2	3	5	6	8	9	11	13	14
33	.8387	.8371	.8355	.8339	.8323	.8307	2	3	5	6	8	10	11	13	14
34	.8290	.8274	.8258	.8241	.8225	.8208	2	3	5	7	8	10	12	13	15
35°	.8192	.8175	.8158	.8141	.8124	.8107	2	3	5	7	9	10	12	14	15
36	.8090	.8073	.8056	.8039	.8021	.8004	2	3	5	7	9	10	12	14	16
37	.7986	.7969	.7951	.7934	.7916	.7898	2	4	5	7	9	11	12	14	16
38	.7880	.7862	.7844	.7826	.7808	.7790	2	4	5	7	9	11	13	14	16
39	.7771	.7753	.7735	.7716	.7698	.7679	2	4	6	7	9	11	13	15	17
40°	.7660	.7642	.7623	.7604	.7585	.7566	2	4	6	8	9	11	13	15	17
41	.7547	.7528	.7509	.7490	.7470	.7451	2	4	6	8	10	12	13	15	17
42	.7431	.7412	.7392	.7373	.7353	.7333	2	4	6	8	10	12	14	16	18
43	.7314	.7294	.7274	.7254	.7234	.7214	2	4	6	8	10	12	14	16	18
44	.7193	.7173	.7153	.7133	.7112	.7092	2	4	6	8	10	12	14	16	18

COSENO

θ	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	.7071	.7050	.7030	.7009	.6988	.6967	2	4	6	8	10	12	15	17	19
46	.6947	.6926	.6905	.6884	.6862	.6841	2	4	6	8	11	13	15	17	19
47	.6820	.6799	.6777	.6756	.6734	.6713	2	4	6	9	11	13	15	17	19
48	.6691	.6670	.6648	.6626	.6604	.6583	2	4	7	9	11	13	15	17	20
49	.6561	.6539	.6517	.6494	.6472	.6450	2	4	7	9	11	13	15	18	20
50°	.6428	.6406	.6383	.6361	.6338	.6316	2	4	7	9	11	13	16	18	20
51	.6293	.6271	.6248	.6225	.6202	.6180	2	5	7	9	11	14	16	18	20
52	.6157	.6134	.6111	.6088	.6065	.6041	2	5	7	9	12	14	16	18	21
53	.6018	.5995	.5972	.5948	.5925	.5901	2	5	7	9	12	14	16	19	21
54	.5878	.5854	.5831	.5807	.5783	.5760	2	5	7	9	12	14	17	19	21
55°	.5736	.5712	.5688	.5664	.5640	.5616	2	5	7	10	12	14	17	19	22
56	.5592	.5568	.5544	.5519	.5495	.5471	2	5	7	10	12	15	17	19	22
57	.5446	.5422	.5398	.5373	.5348	.5324	2	5	7	10	12	15	17	20	22
58	.5299	.5275	.5250	.5225	.5200	.5175	2	5	7	10	12	15	17	20	22
59	.5150	.5125	.5100	.5075	.5050	.5025	3	5	8	10	13	15	18	20	23
60°	.5000	.4975	.4950	.4924	.4899	.4874	3	5	8	10	13	15	18	20	23
61	.4848	.4823	.4797	.4772	.4746	.4720	3	5	8	10	13	15	18	20	23
62	.4695	.4669	.4643	.4617	.4592	.4566	3	5	8	10	13	15	18	21	23
63	.4540	.4514	.4488	.4462	.4436	.4410	3	5	8	10	13	15	18	21	23
64	.4384	.4358	.4331	.4305	.4279	.4253	3	5	8	11	13	16	18	21	24
65°	.4226	.4200	.4173	.4147	.4120	.4094	3	5	8	11	13	16	19	21	24
66	.4067	.4041	.4014	.3987	.3961	.3934	3	5	8	11	13	16	19	21	24
67	.3907	.3881	.3854	.3827	.3800	.3773	3	5	8	11	13	16	19	21	24
68	.3746	.3719	.3692	.3665	.3638	.3611	3	5	8	11	14	16	19	22	24
69	.3584	.3557	.3529	.3502	.3475	.3448	3	5	8	11	14	16	19	22	25
70°	.3420	.3393	.3365	.3338	.3311	.3283	3	5	8	11	14	16	19	22	25
71	.3256	.3228	.3201	.3173	.3145	.2118	3	5	8	11	14	17	19	22	25
72	.3090	.3062	.3035	.3007	.2979	.2952	3	6	8	11	14	17	19	22	25
73	.2924	.2896	.2868	.2840	.2812	.2784	3	6	8	11	14	17	20	22	25
74	.2756	.2728	.2700	.2672	.2644	.2616	3	6	8	11	14	17	20	22	25
75°	.2588	.2560	.2532	.2504	.2476	.2447	3	6	8	11	14	17	20	23	25
76	.2419	.2391	.2363	.2334	.2306	.2278	3	6	8	11	14	17	20	23	25
77	.2250	.2221	.2193	.2164	.2136	.2108	3	6	9	11	14	17	20	23	26
78	.2079	.2051	.2022	.1994	.1965	.1937	3	6	9	11	14	17	20	23	26
79	.1908	.1880	.1851	.1822	.1794	.1765	3	6	9	11	14	17	20	23	26
80°	.1736	.1708	.1679	.1650	.1622	.1593	3	6	9	12	14	17	20	23	26
81	.1564	.1536	.1507	.1478	.1449	.1421	3	6	9	12	14	17	20	23	26
82	.1392	.1363	.1334	.1305	.1276	.1246	3	6	9	12	14	17	20	23	26
83	.1219	.1190	.1161	.1132	.1103	.1074	3	6	9	12	14	17	20	23	26
84	.1045	.1016	.0987	.0958	.0929	.0901	3	6	9	12	14	17	20	23	26
85°	.0872	.0843	.0814	.0785	.0756	.0727	3	6	9	12	14	17	20	23	26
86	.0698	.0669	.0640	.0610	.0581	.0552	3	6	9	12	15	17	20	23	26
87	.0523	.0494	.0465	.0436	.0407	.0378	3	6	9	12	15	17	20	23	26
88	.0349	.0320	.0291	.0262	.0233	.0204	3	6	9	12	15	17	20	23	26
89	.0175	.0145	.0116	.0087	.0058	.0029	3	6	9	12	15	17	20	23	26
90°	.0000														

La forma de utilizar la tabla, es similar a la forma como se utiliza la tabla de la función seno, con la observación de que las partes proporcionales se restan.

Ejemplo:

Hallar el valor de cos 40° 35'

En la tabla, se localiza 40° en la columna cuyo encabezado es θ se sigue por ese mismo renglón hasta la columna cuyo encabezado es 30'. De esta forma obtenemos el valor .7604, que corresponde al coseno de un ángulo de 40° 30'. Siguiendo por el mismo renglón localizamos el valor que corresponde a 5', y lo restamos al primer valor localizado.

Coseno 40° 30'		.7604
Partes proporcionales	5'	− 9
		.7595

COSENO

G	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	.9994	.9993	.9992	.9990	.9989	.9988	0	0	0	1	1	1	1	1	1
3	.9986	.9985	.9983	.9981	.9980	.9978	0	0	1	1	1	1	1	1	1
4	.9976	.9974	.9971	.9969	.9967	.9964	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5°	.9962	.9959	.9957	.9954	.9951	.9946	0	1	1	1	2	2	2	2	3
6	.9945	.9942	.9939	.9936	.9932	.9929	0	1	1	1	2	2	2	3	3
7	.9925	.9922	.9918	.9914	.9911	.9907	0	1	1	2	2	2	3	3	3
8	.9903	.9899	.9894	.9890	.9886	.9881	0	1	1	2	2	3	3	3	4
9	.9877	.9872	.9868	.9863	.9858	.9853	0	1	1	2	2	3	3	4	4
10°	.9848	.9843	.9838	.9833	.9827	.9822	1	1	2	2	3	3	4	4	5
11	.9816	.9811	.9805	.9799	.9793	.9787	1	1	2	2	3	3	4	5	5
12	.9781	.9775	.9769	.9763	.9757	.9750	1	1	2	3	3	4	4	5	6
13	.9744	.9737	.9730	.9724	.9717	.9710	1	1	2	3	3	4	5	5	6
14	.9703	.9696	.9689	.9681	.9674	.9667	1	1	2	3	4	4	5	6	7
15°	.9659	.9652	.9644	.9636	.9628	.9621	1	2	2	3	4	5	5	6	7
16	.9613	.9605	.9596	.9588	.9580	.9572	1	2	2	3	4	5	6	7	7
17	.9563	.9555	.9546	.9537	.9528	.9520	1	2	3	3	4	5	6	7	8
18	.9511	.9502	.9492	.9483	.9474	.9465	1	2	3	4	5	6	6	7	8
19	.9455	.9446	.9436	.9426	.9417	.9407	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20°	.9397	.9387	.9377	.9367	.9356	.9346	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	.9336	.9225	.9315	.9304	.9293	.9283	1	2	3	4	5	6	7	9	10
22	.9272	.9261	.9250	.9239	.9228	.9216	1	2	3	4	6	7	8	9	10
23	.9205	.9194	.9182	.9171	.9159	.9147	1	2	3	5	6	7	8	9	10
24	.9135	.9124	.9112	.9100	.9088	.9075	1	2	4	5	5	7	8	10	11
25°	.9063	.9051	.9038	.9026	.9013	.9001	1	3	4	5	6	8	9	10	11
26	.8988	.8975	.8962	.8949	.8936	.8923	1	3	4	5	6	8	9	10	11
27	.8910	.8897	.8884	.8870	.8857	.8843	1	3	4	5	7	8	9	11	12
28	.8829	.8816	.8802	.8788	.8774	.8760	1	3	4	6	7	8	10	11	12
29	.8746	.8732	.8718	.8704	.8689	.8675	1	3	4	6	7	9	10	11	13
30°	.8660	.8646	.8631	.8616	.8601	.8587	1	3	4	6	7	9	10	12	13
31	.8572	.8557	.8542	.8526	.8511	.8496	2	3	5	6	8	9	11	12	14
32	.8480	.8465	.8450	.8434	.8418	.8403	2	3	5	6	8	9	11	13	14
33	.8387	.8371	.8355	.8339	.8323	.8307	2	3	5	6	8	10	11	13	14
34	.8290	.8274	.8258	.8341	.8225	.8208	2	3	5	7	8	10	12	13	15
35°	.8192	.8175	.8158	.8141	.8124	.8107	2	3	5	7	8	10	12	14	15
36	.8090	.8073	.8056	.8039	.8021	.8004	2	3	5	7	9	10	12	14	16
37	.7986	.7969	.7951	.7934	.7916	.7898	2	4	5	7	9	11	12	14	16
38	.7880	.7862	.7844	.7826	.7808	.7790	2	4	5	7	9	11	13	14	16
39	.7771	.7753	.7735	.7716	.7698	.7679	2	4	6	7	9	11	13	15	17
40°	.7660	.7642	.7623	.7604	.7585	.7566	2	4	6	8	9	11	13	15	17
41	.7547	.7528	.7509	.7490	.7470	.7451	2	4	6	8	10	12	13	15	17
42	.7431	.7412	.7392	.7373	.7353	.7333	2	4	6	8	10	12	14	16	18
43	.7314	.7294	.7274	.7254	.7234	.7214	2	4	6	8	10	12	14	16	18
44	.7193	.7173	.7153	.7133	.7112	.7092	2	4	6	8	10	12	14	16	18

EJERCICIO:

Utiliza la tabla anterior para encontrar el valor de las funciones indicadas.

1) Cos 40° 30'=____________ 6) Cos 18° 20' = ____________

2) Cos 39° 40'=____________ 7) Cos 13° 12' = ____________

3) Cos 89° 36'=____________ 8) Cos 13° 16' = ____________

4) Cos 60° 30'=____________ 9) Cos 17° 12' = ____________

5) Cos 45° 40'=____________ 10) Cos 15° 13' = ____________

Podemos utilizar también la tabla anterior con el fin de conocer el ángulo al que corresponde determinado valor del coseno.

Ejemplo:

Nos interesa conocer el valor del ángulo para el cuál la función coseno toma un valor de .8718

Para ello localizamos en la tabla de la función coseno este valor.

COSENO

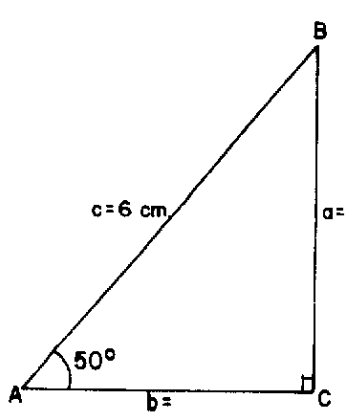
θ	0	10'	20'	30'	40'	50	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	.9994	.9993	.9992	.9990	.9989	.9988	0	0	0	1	1	1	1	1	1
3	.9986	.9985	.9783	.9981	.9980	.9978	0	0	1	1	1	1	1	1	1
4	.9976	.9974	.9971	.9969	.9967	.9964	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5°	.9962	.9959	.9957	.9954	.9951	.9948	0	1	1	1	2	2	2	2	3
6	.9945	.9942	.9939	.9936	.9932	.9929	0	1	1	1	2	2	2	3	3
7	.9925	.9922	.9918	.9914	.9911	.9907	0	1	1	2	2	2	3	3	3
8	.9903	.9899	.9894	.9890	.9886	.9881	0	1	1	2	2	3	3	3	4
9	.9877	.9872	.9868	.9863	.9858	.9853	0	1	1	2	2	3	3	4	4
10°	.9848	.9843	.9838	.9833	.9827	.9822	1	1	2	2	3	3	4	4	5
11	.9816	.9811	.9805	.9799	.9793	.9787	1	1	2	2	3	3	4	5	5
12	.9781	.9775	.9769	.9763	.9757	.9750	1	1	2	3	3	4	4	5	6
13	.9744	.9737	.9730	.9724	.9717	.9710	1	1	2	3	3	4	5	5	6
14	.9703	.9696	.9689	.9681	.9674	.9667	1	1	2	3	4	4	5	6	7
15°	.9659	.9652	.9644	.9636	.9628	.9621	1	2	2	3	4	5	5	6	7
16	.9613	.9605	.9596	.9588	.9580	.9572	1	2	2	3	4	5	6	7	7
17	.9563	.9555	.9546	.9537	.9528	.9520	1	2	3	3	4	5	6	7	8
18	.9511	.9502	.9492	.9483	.9474	.9465	1	2	3	4	5	6	6	7	8
19	.9455	.9446	.9436	.9426	.9417	.9407	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20°	.9397	.9387	.9377	.9367	.9356	.9346	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	.9336	.9225	.9315	.9304	.9293	.9283	1	2	3	4	5	6	7	9	10
22	.9272	.9261	.9250	.9239	.9228	.9216	1	2	3	4	6	7	8	9	10
23	.9205	.9194	.9182	.9171	.9159	.9147	1	2	3	5	6	7	8	9	10
24	.9135	.9124	.9112	.9100	.9088	.9075	1	2	4	5	6	7	8	10	11
25°	.9063	.9051	.9038	.9026	.9013	.9001	1	3	4	5	6	8	9	10	11
26	.8988	.8975	.8962	.8949	.8936	.8923	1	3	4	5	6	8	9	10	11
27	.8910	.8897	.8884	.8870	.8857	.8843	1	3	4	5	7	8	9	11	12
28	.8829	.8816	.8802	.8788	.8774	.8760	1	3	4	6	7	8	10	11	12
29	.8746	.8732	.8718	.8704	.8689	.8675	1	3	4	6	7	9	10	11	13
30°	.8660	.8646	.8631	.8616	.8601	.8587	1	3	4	6	7	9	10	12	13
31	.8572	.8557	.8542	.8526	.8511	.8496	2	3	5	6	8	9	11	12	14
32	.8480	.8465	.8450	.8434	.8418	.8403	2	3	5	6	8	9	11	13	14
33	.8387	.8371	.8355	.8339	.8323	.8307	2	3	5	6	8	10	11	13	14
34	.8290	.8274	.8258	.8341	.8225	.8208	2	3	5	7	8	10	12	13	15
35°	.8192	.8175	.8158	.8141	.8124	.8107	2	3	5	7	8	10	12	14	15
36	.8090	.8073	.8056	.8039	.8021	.8004	2	3	5	7	9	10	12	14	16
37	.7986	.7969	.7951	.7934	.7916	.7898	2	4	5	7	9	11	12	14	16
38	.7880	.7862	.7844	.7826	.7808	.7790	2	4	5	7	9	11	13	14	16
39	.7771	.7753	.7735	.7716	.7698	.7679	2	4	6	7	9	11	13	15	17
40°	.7660	.7642	.7623	.7604	.7585	.7566	2	4	6	8	9	11	13	15	17
41	.7547	.7528	.7509	.7490	.7470	.7451	2	4	6	8	10	12	13	15	17
42	.7431	.7412	.7392	.7373	.7353	.7333	2	4	6	8	10	12	14	16	18
43	.7314	.7294	.7274	.7254	.7234	.7214	2	4	6	8	10	12	14	16	18
44	.7193	.7173	.7153	.7133	.7112	.7092	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Observamos los valores que aparecen en el renglón y en la columna, de esta forma podemos conocer el valor del ángulo buscado. En este caso el valor corresponde a $29^\circ\ 20'$

Utilizando la definición de la función coseno y la tabla anterior, podemos resolver problemas donde intervenga un triángulo rectángulo, un ángulo Θ, el cateto adyacente el ángulo Θ y la hipotenusa.

Ejemplos:

a) ¿Cuánto mide el cateto b del siguiente triángulo rectángulo?



Consideramos la función

$$\text{Cos } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Sustituimos los valores conocidos

$$\text{Cos } 50^\circ = \frac{b}{6 \text{ cm}}$$

Buscamos en la tabla el valor que co-- rresponde a Cos 50° y sustituimos este valor en la igualdad

$$.6428 = \frac{b}{6 \text{ cm.}}$$

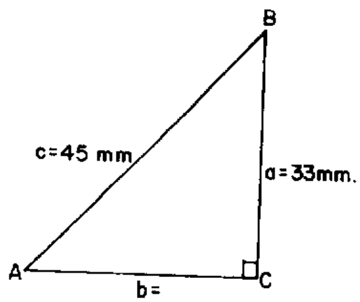
Despejamos la incógnita

$b = (6)\ (.6428)$

Por lo tanto

$b = 3.8568$ cm.

b) ¿Cuánto mide el ángulo B del siguiente triángulo rectángulo?



La función que relaciona el cateto adyacente al ángulo B y la hipotenusa es el coseno:

$$\text{Cos B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

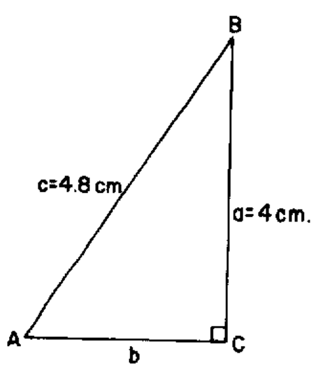
$$\text{Cos B} = \frac{33}{45} = .7333$$

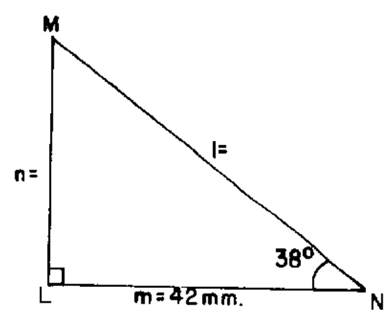
De esta forma hemos obtenido el valor del coseno para el ángulo B. Buscamos en la tabla a que ángulo corresponde este valor y encontramos que:

$$\measuredangle \text{ B} = 42^\circ\ 50'$$

EJERCICIO:

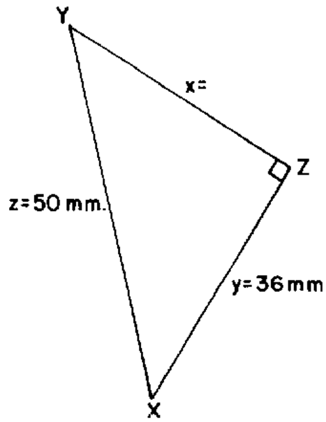
Encuentra el valor solicitado en cada uno de los siguientes triángulos.

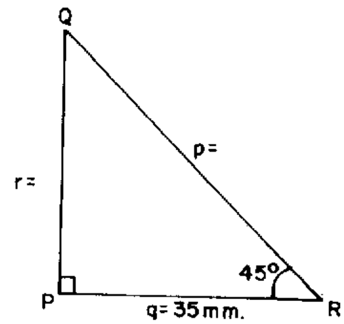


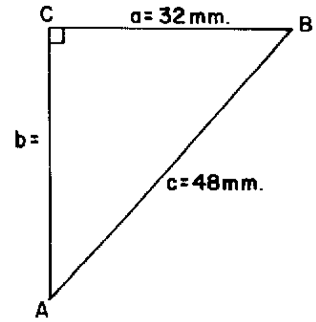


$\measuredangle$ B= ____________

l= ________________



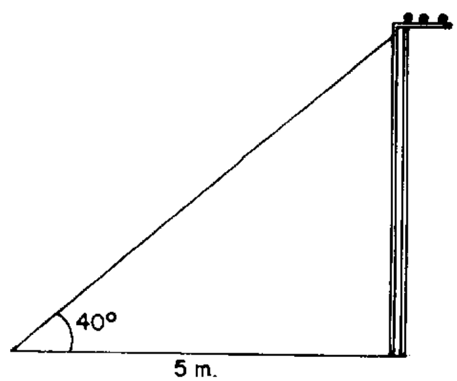




∢ x= ______________ p= ____________________ ∢ A= _________________

Usando la función coseno, podemos resolver problemas de tipo práctico. Por ejemplo: ¿Cuál es la longitud de un tirante de alambre de un poste vertical, si el ángulo que forma con el piso es de 40° y la distancia que hay del punto donde está sujeto el alambre al pie del poste es de 5 mts.?

Representamos los datos del problema por medio de un dibujo.



Sabemos que $\text{Cos } \theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$; en este caso

$$\text{Cos } 40° = \frac{5}{x}$$

Buscamos en la tabla correspondiente el valor de cos 40° y encontramos que es igual a .7660.

Sustituimos este valor, despejamos la incógnita y resolvemos las operaciones indicadas.

$$.7660 = \frac{5}{x}$$

$$x\ (.7660) = 5$$

$$x = \frac{5}{.7660}$$

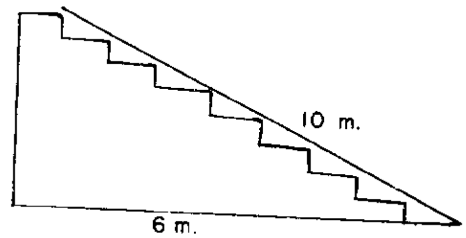
$$x = 6.52 \text{ mts.}$$

La longitud del tirante es de 6.52 mts.

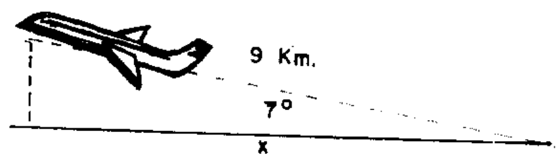
EJERCICIO:

Resuelve los siguientes problemas:

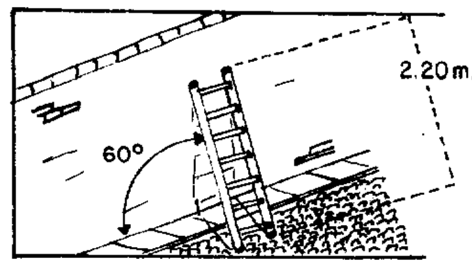
1. ¿Cuánto mide el ángulo de la pendiente de una escalera, cuya base mide 6 m. y cuya rampa tiene una longitud de 10 m?



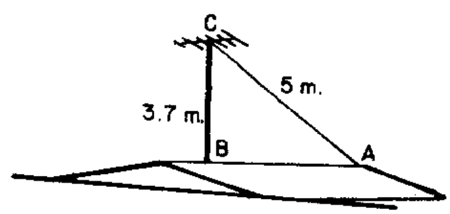
2. Un avión despega con un ángulo de elevación de 7° ¿Cuál es la distancia horizontal que recorre el avión después de haber volado 9 km.?



3. Sobre una pared se apoya una escalera formando un ángulo de 60° con el piso. Si se sabe que la escalera mide 2.20 m. de largo. ¿Cuál es la distancia de la pared a la base de la escalera?



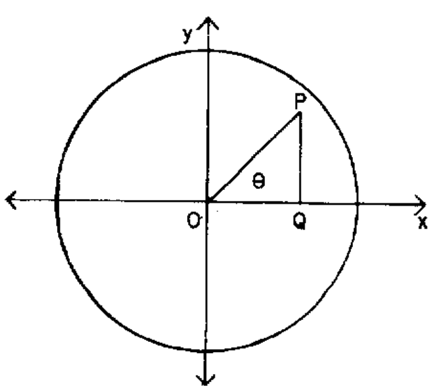
4. Una antena de televisión está sujeta como se muestra en la figura. Si el tirante que va de C a A mide 5 m. y la antena mide 3.7 mts. ¿Cuál es la medida del ángulo BCA?.



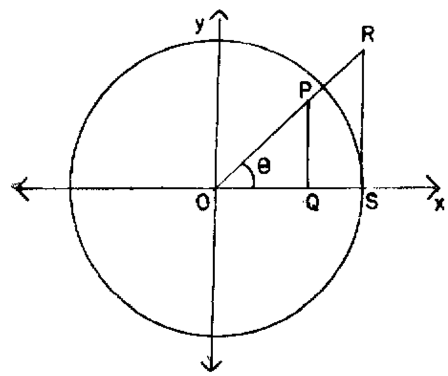
LA FUNCION TANGENTE

Utilizando el círculo trigonométrico podemos calcular el valor de la tangente para cualquier ángulo.

Para ello trazamos un círculo trigonométrico, y un triángulo OPQ.



Prolongamos el lado OP del ángulo θ y trazamos el segmento RS perpendicular al eje x y tangente a la circunferencia en el punto S, formandose el triángulo rectángulo OSR.



Los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ son paralelos, por lo cual podemos aplicar el teorema de tales, obteniendo:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS}$$

Como OS es un radio de la circunferencia, OS = 1 por lo tanto:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{1} \text{, es decir } \frac{PQ}{OQ} = RS \quad (1)$$

También sabemos que $\tan \theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ entonces

$\text{Tan } \theta = \dfrac{PQ}{OQ}$ De donde:

Tenemos que $\tan \theta = RS$; en el círculo trigonométrico

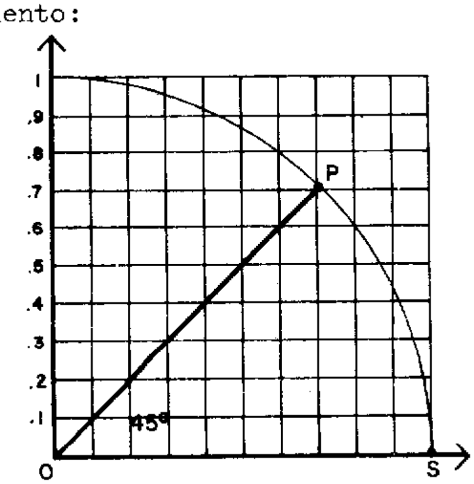
De esta forma hemos encontrado un segmento que nos permite representar a la función tangente. El valor de la tangente de un ángulo será entonces la magnitud del segmento del punto S al punto R.

Ejemplo:

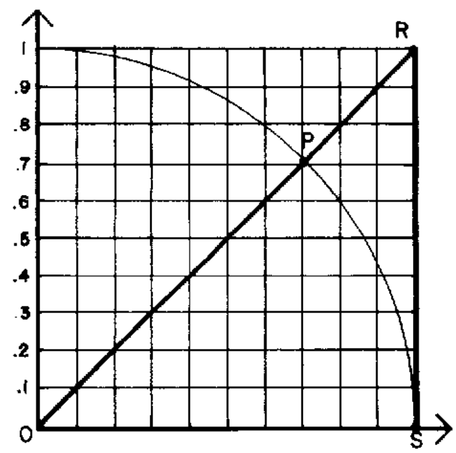
Obtengamos el valor de la tangente de un ángulo de 45°.

Para ello se puede seguir el siguiente procedimiento:

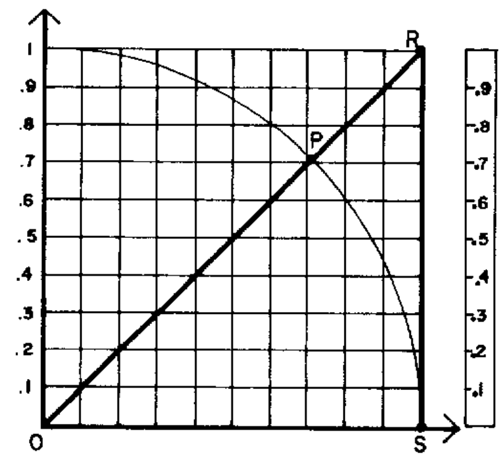
1. Trazamos un ángulo central de 45°, de tal forma que su lado inicial coincida con el semieje x positivo.



2. Prolongamos el lado OP del ángulo y trazamos el segmento RS perpendicular al eje x y tangente a la circunferencia en el punto S.

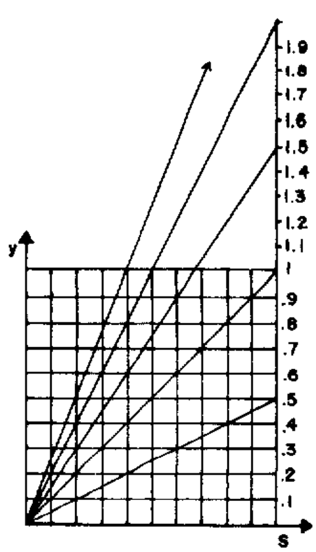


3. Medimos el segmento RS, considerando como unidad de medida el radio del círculo trigonométrico. En este caso, el segmento RS mide 1. Como la medida del segmento RS determina el valor de la tangente, entonces: tan 45° = 1



El segmento RS, con el que hemos representado la función tangente, nos permitirá ver objetivamente las variaciones de la función según la amplitud del ángulo.

Observemos que pasa con los valores de la tangente para ángulos de 0° a 90°



A medida que el ángulo crece, el segmento RS (valor de la tangente) toma valores cada vez más grandes, a tal grado, que resulta casi imposible poder calcularlas utilizando el círculo trigonométrico.

A medida que el ángulo decrece, el valor del segmento RS (valor de la tangente) disminuye. Cuando el ángulo vale 0° el valor de la tangente es igual a 0.

Es importante notar que la variación del crecimiento del valor de la tangente no es la misma que la del ángulo.

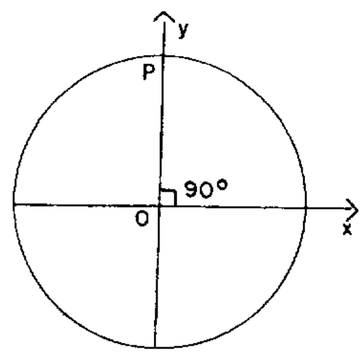
Por ejemplo:

$\tan 41° = 0.86$
$\tan 82° = 7.11$

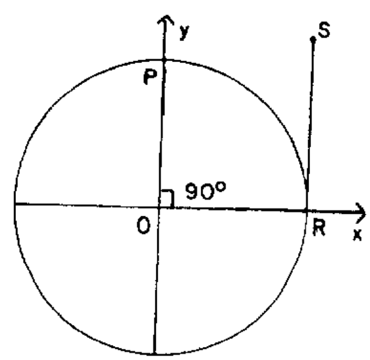
El tamaño del ángulo se ha duplicado, en cambio, el valor de tan 82° es más de 8 veces el de tan 41°.

Tangente de 90°

Consideremos el primer cuadrante de un círculo trigonométrico y tracemos un ángulo central de 90°.



Tracemos el segmento RS perpendicular al eje X y tangente a la circunferencia en el punto R.



El segmento OP y el segmento RS son paralelos; por lo tanto no podemos encontrar un punto de intersección entre ellos. Lo anterior significa que no existe un valor para la tangente de un ángulo de 90°.

A continuación presentamos una tabla que nos permitirá obtener los valores de la función tangente.

TANGENTE NATURAL

θ	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	.0000	.0029	.0058	.0087	.0116	.0145	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0524	.0553	.0582	.0612	.0641	.0670	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	.0699	.0729	.0758	.0787	.0816	.0846	3	6	9	12	15	18	20	23	26
5°	.0875	.0904	.0934	.0963	.0992	.1022	3	6	9	12	15	18	21	23	26
6	.1051	.1080	.1110	.1139	.1169	.1198	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	.1228	.1257	.1287	.1317	.1346	.1376	3	6	9	12	15	18	21	24	27
8	.1405	.1435	.1465	.1495	.1524	.1554	3	6	9	12	15	18	21	24	27
9	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1733	3	6	9	12	15	18	21	24	27
10°	.1763	.1793	.1823	.1853	.1883	.1914	3	6	9	12	15	18	21	24	27
11	.1944	.1974	.2004	.2035	.2065	.2095	3	6	9	12	15	18	21	24	27
12	.2126	.2156	.2186	.2217	.2247	.2278	3	6	9	12	15	18	21	24	27
13	.2309	.2339	.2370	.2401	.2432	.2462	3	6	9	12	15	18	22	25	28
14	.2493	.2524	.2555	.2556	.2617	.2648	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15°	.2679	.2711	.2742	.2773	.2805	.2836	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	.2867	.2899	.2931	.2962	.2994	.3026	3	6	9	13	16	19	22	25	28
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3185	.3217	3	6	10	13	16	19	22	26	29
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3378	.3411	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	.3443	.3476	.3508	.3541	.3574	.3607	3	7	10	13	16	20	23	26	29
20°	.3640	.3673	.3706	.3739	.3772	.3805	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4006	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628	4	7	11	14	18	21	25	28	32
25°	.4663	.4699	.4734	.4770	.4806	.4641	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30°	.5774	.5812	.5851	.5890	.5930	.5969	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208	4	8	12	16	20	24	27	32	36
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35°	.7002	.7046	.7089	.7133	.7177	.7221	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490	5	9	14	18	23	27	32	36	41
37	.7536	.7581	.7627	.7673	.7720	.7766	5	9	14	18	23	28	32	37	42
38	.7813	.7860	.7907	.7954	.8002	.8050	5	9	14	19	24	28	33	38	43
39	.8098	.8146	.8195	.8243	.8292	.8342	5	10	15	20	24	29	34	39	44
40°	.8391	.8441	.8491	.8541	.8591	.8642	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	.8693	.8744	.8796	.8847	.8899	.8952	5	10	16	21	26	31	36	41	47
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9713	.9770	.9827	.9884	.9942	6	11	17	23	29	34	40	46	51

TANGENTE NATURAL

G	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	1.000	1.006	1.012	1.018	1.024	1.030	1	1	2	2	3	4	4	5	5
46	1.036	1.042	1.048	1.054	1.060	1.066	1	1	2	2	3	4	4	5	6
47	1.072	1.079	1.085	1.091	1.098	1.104	1	1	2	3	3	4	4	5	6
48	1.111	1.117	1.124	1.130	1.137	1.144	1	1	2	3	3	4	5	5	6
49	1.150	1.157	1.164	1.171	1.178	1.185	1	1	2	3	3	4	5	6	6
50°	1.192	1.199	1.206	1.213	1.220	1.228	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	1.235	1.242	1.250	1.257	1.265	1.272	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	1.280	1.288	1.295	1.303	1.311	1.319	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	1.327	1.335	1.343	1.351	1.360	1.368	1	2	2	3	4	5	6	7	7
54	1.376	1.385	1.393	1.402	1.411	1.419	1	2	3	3	4	5	6	7	8
55°	1.428	1.437	1.446	1.455	1.464	1.473	1	2	3	4	5	5	6	7	8
56	1.483	1.492	1.501	1.511	1.520	1.530	1	2	3	4	5	6	7	8	9
57	1.540	1.550	1.560	1.570	1.580	1.590	1	2	3	4	5	6	7	8	9
58	1.600	1.611	1.621	1.632	1.643	1.653	1	2	3	4	5	6	7	9	10
59	1.664	1.675	1.686	1.698	1.709	1.720	1	2	3	5	6	7	8	9	10
60°	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1	3	4	5	6	8	9	10	12
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1	3	4	5	7	8	10	11	12
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	1	3	4	6	7	9	10	12	13
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65°	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2	4	5	7	9	11	13	15	16
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2	4	7	9	11	13	15	17	20
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	3	5	8	10	13	16	18	21	24
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3	6	10	13	16	19	23	26	29
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	4	7	11	14	18	22	25	29	32
74	3.487	3.576	3.566	3.606	3.647	3.689	4	8	12	16	20	24	29	33	37
75°	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	5	9	14	19	23	28	33	37	42
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275									
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638									
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066									
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576									
80°	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197									
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968									
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953									
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255									
84	9.514	9.788	10.08	10.39	10.71	11.06									
85°	11.43	11.83	12.25	12.71	13.20	13.73									
86	14.30	14.92	15.60	16.35	17.17	18.07									
87	19.08	20.21	21.47	22.90	24.54	26.43									
88	28.64	31.24	34.37	38.19	42.96	49.10									
89	57.29	68.75	85.94	114.6	171.9	343.8									
90°	∞														

La forma de utilizar la tabla es similar a la forma como se utiliza la tabla de la función seno.

EJERCICIO

a) Utiliza la tabla anterior para encontrar el valor de las funciones indicadas

1) tan 40° 30'= ____________ 6) tan 36° 33' = ____________

2) tan 31° 10'= ____________ 7) tan 40° 39' = ____________

3) tan 36° 11'= ____________ 8) tan 60° 10' = ____________

4) tan 10° 25'= ____________ 9) tan 80° = ____________

5) tan 11° 12'= ____________ 10) tan 70° = ____________

b) Utiliza la tabla anterior para encontrar el valor del ángulo de cada uno de los siguientes valores de la función.

1) .2679 ____________ 6) 5.671 ____________

2) .5696 ____________ 7) 6.430 ____________

3) 6.314 ____________ 8) 57.26 ____________

4) 2.768 ____________ 9) 171.9 ____________

5) 2.699 ____________ 10) 114.6 ____________

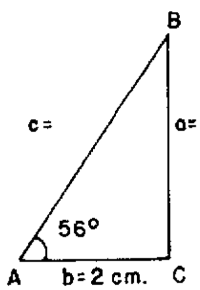
Con la función tangente definida de la siguiente forma.

$$\text{Tan } \Theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Podemos resolver problemas donde intervengan: un triángulo rectángulo, un ángulo Θ, el cateto opuesto al ángulo Θ y el cateto adyacente al ángulo Θ

Ejemplo:

a) ¿Cuánto mide el cateto a del siguiente triángulo rectángulo?



Consideramos la función

$$\text{Tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Sustituimos los valores conocidos

$$\text{Tan } 56° = \frac{a}{2}$$

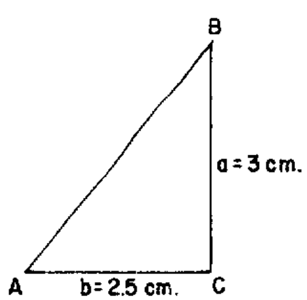
Buscamos en la tabla el valor que corresponde de a tan 56° y sustituimos este valor en la igualdad

$$1.483 = \frac{a}{2}$$

Despejemos la incógnita y, resolvemos las operaciones indicadas.

$a = 2(1.483)$
$a = 2.966$ cm. El valor del cateto desconocido.

b). ¿Cuánto mide el ángulo B del siguiente triángulo rectángulo?



La función que relaciona el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo B, es la tangente:

$$\text{Tan } B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2.5}{3}$$

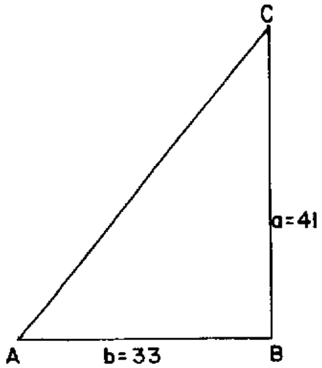
$\text{Tan } B = 0.833$

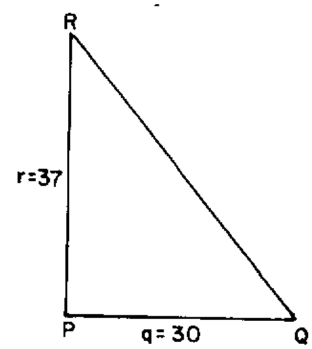
De esta forma hemos obtenido el valor de la tangente para el ángulo B. Buscamos en la tabla a que ángulo corresponde este valor y encontramos que:

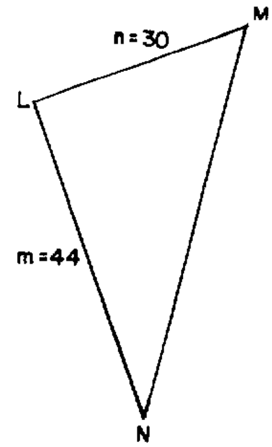
$$\measuredangle B = 39°$$

EJERCICIOS:

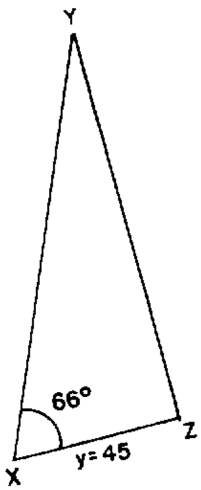
a) Encuentra el valor solicitado en cada uno de los siguientes triángulos.

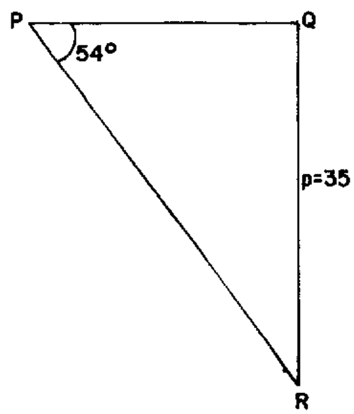


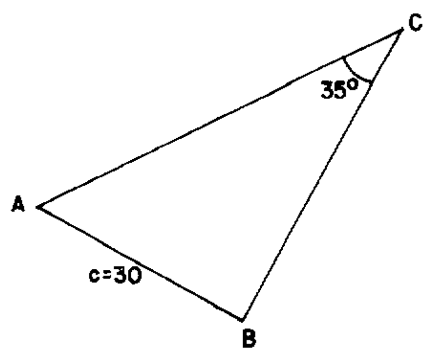




∢ A = ______________ ∢ Q = ______________ ∢ N = ______________



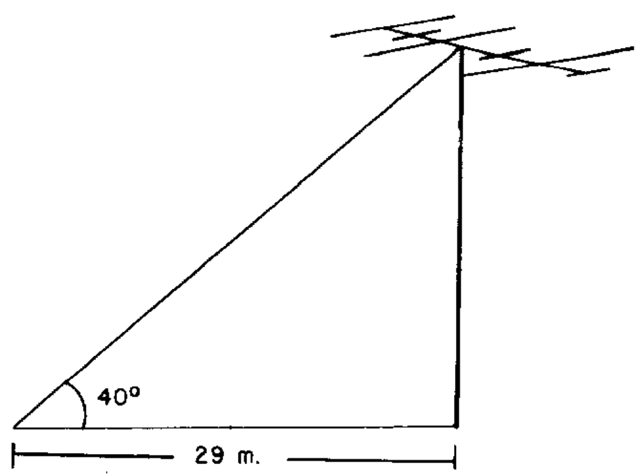




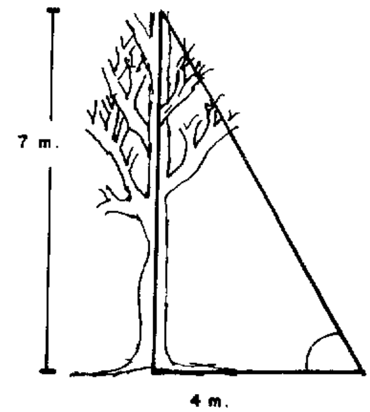
x = ______________ r = ______________ a = ______________

b) Resuelve los siguientes problemas:

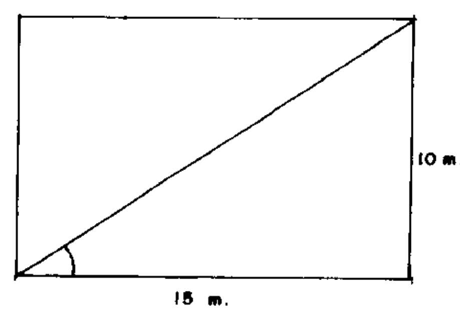
1) Con los datos de la figura, calcula la altura de la antena.



2) ¿Qué ángulo de inclinación tendrán los rayos solares, si la sombra de un árbol que tiene 7 m. de altura, se proyecta a 4 m?



3) Un rectángulo tiene 15 m. de base y 10 m. de altura. ¿Qué ángulo forma la base con la diagonal?

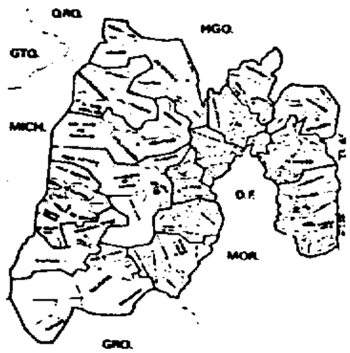


unidad 8

estadística y probabilidad

EL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO SERÁ - UN DÍA TAN NECESARIO PARA EL CIUDADANO EFICIENTE COMO LA CAPACIDAD DE LEER Y ESCRIBIR.

H. G. WELLS.



X CENSO GENERAL DE POBLACION

Y VIVIENDA

ESTADO DE MEXICO

Población de 5 años y más que hablan alguna lengua indígena según condición de habla española.

ENTIDAD FEDERATIVA Y LENGUA INDIGENA	POBLACION DE 5 AÑOS Y MAS QUE HABLA LENGUA INDIGENA	HABLA ESPAÑOL	NO HABLA ESPAÑOL	NO ESPECIFICADO
MEXICO	360 402	297 263	39 681	23 458
AMUZCO	79	74	2	3
CHATINGO	21	19	1	1
CHINANTECO	427	360	41	26
CHOCHO	259	250	2	7
CHOL	51	46	2	3
CHONTAL DE OAXACA	99	92	7	-
CHONTAL DE TABASCO	23	1	22	-
CORA	15	12	2	1
CUICATECO	173	155	12	6
HUAVE	18	16	-	2
HUASTECO	586	462	110	14
HUICHOL	64	22	42	-
NAME	2	2	-	-
MAZAHUA	177 288	154 228	15 944	7 116
MAZATECO	1 402	1 216	117	69
MAYA	1 904	1 746	103	55
MAYO	21	21	-	-
MEXICANO O NAHUAL	22 689	19 945	1 747	997
MIXTECO	12 381	10 752	1 161	468
MIXE	691	620	35	36
OTOMI	98 115	81 613	10 626	5 876
PAME	15	11	2	2
PIMA	1	1	-	-
POPOLUCA DE VERACRUZ	65	63	1	1
SERI	10	9	-	1
TARAHUMARA	120	77	36	7
TARASCO	1 410	1 298	55	57
TEPEHUA	82	77	4	1
TEPEHUANA				
TEPECANO	34	33	1	-
TLAPANECO	410	375	21	14
TOJOLABAL	22	22	-	-
TOTONACO	2 475	1 730	665	80
TRIQUI	231	213	12	6
IZELTAL	146	135	6	5
IZOTZIL	142	86	51	5
YAQUI	45	38	6	1
YUMA	5	5	-	-
ZAPOTECO	12 461	11 431	573	457
ZOQUE	78	76	1	1
OTRAS LENGUAS INDIGENAS	1 287	1 024	139	124
INSUF ESPECIFICADO	25 055	8 907	8 132	8 016

El manejo de información a pequeña y gran escala, ha sido asunto de interés para el hombre en su desarrollo histórico. Hoy en día con la aparición de las computadoras — máquinas con capacidad para almacenar y operar gran cantidad de datos en forma mucho más rápida que cualquier otro recurso utilizado por el hombre — se han podido estudiar nuevos problemas y desarrollar nuevas teorías. En esta unidad, repasaremos algunos conceptos ya estudiados en la octava unidad del primero y del segundo curso de matemáticas.

Entre los conceptos que repasaremos destacan:

a) Representación gráfica de datos correspondientes a fenómenos sociales, económicos y naturales.

b) Interpretación de gráficas.

c) Aplicación de las fórmulas de probabilidad en la solución de problemas.

En el desarrollo de la unidad, requeriremos consultar las tablas del anexo, colocado en la parte final de ésta.

OBJETIVOS PARTICULARES

* Interpretará diferentes curvas de frecuencia.
* Aplicará las fórmulas de probabilidad, aprendidas en la resolución de problemas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Obtendrá datos estadísticos sobre fenómenos naturales, económicos y sociales.
- Representará con una curva de frecuencia, los resultados de sus investigaciones.
- Interpretará diferentes gráficas de investigaciones dadas.
- Aplicará las fórmulas de unión y complemento de eventos en la resolución de problemas.
- Aplicará la fórmula de intersección de eventos en la resolución de problemas.
- Aplicará las fórmulas de probabilidad y el concepto de proporción, en inferencias estadísticas.

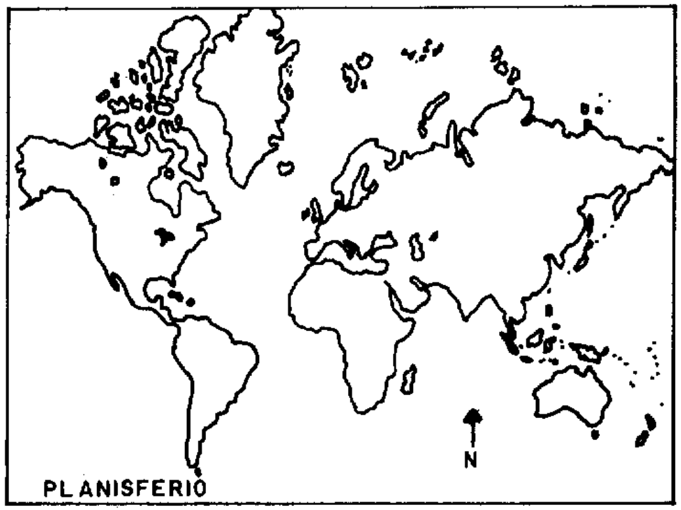
OBTENCION DE DATOS Y SU REPRESENTACION GRAFICA

En la octava unidad de tus cursos anteriores de matemáticas, estudiaste algunos conceptos básicos de Estadística y de Probabilidad, en esta unidad hacemos uso de estos conceptos, aplicándolos en situaciones que son de interés para quienes hacen uso de esta disciplina.

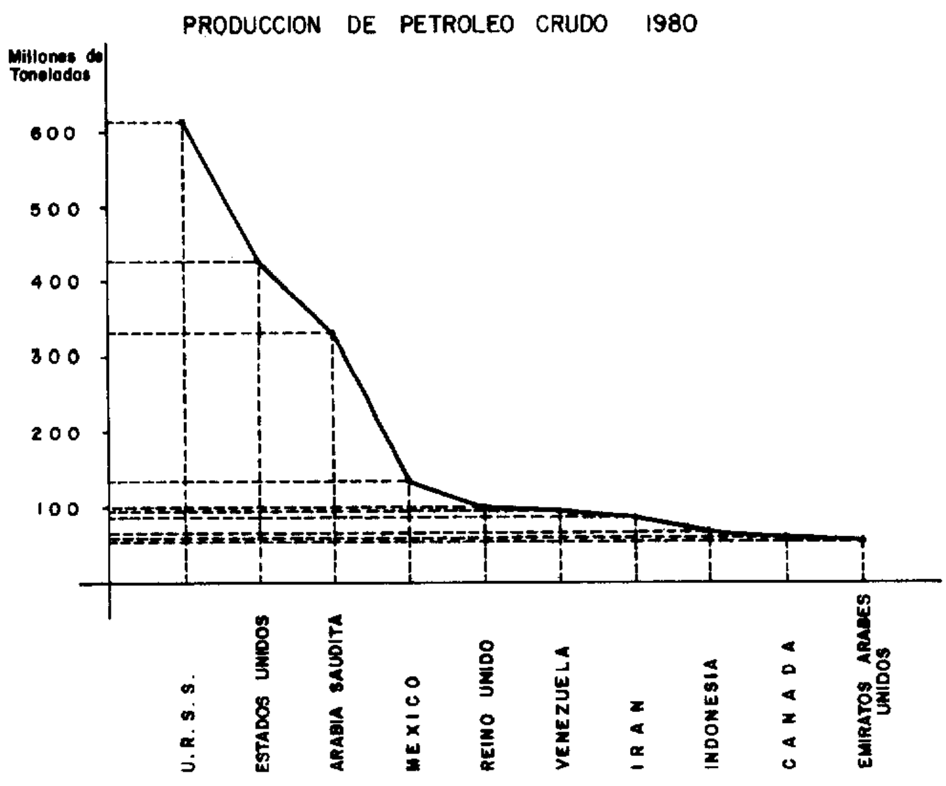
Iniciemos analizando la producción de petróleo crudo en el año de 1980 en 10 de los principales países productores de este energético.

PRODUCCION DE PETROLEO EN CRUDO 1980

PAIS	MILLONES DE TON.
U.R.S.S	611
Estados Unidos	427
Arabia Saudita	330
México	133
Reino Unido	100
Venezuela	95
Irán	87
Indonesia	66
Canadá	60
Emir. Arabes Unidos	59



Estos datos se obtuvieron del "Almanaque Mundial" (1984) , con ellos podemos elaborar una gráfica que puede ser de barras o bien un histograma, poligonal o pictograma. Elaboremos la poligonal (también llamada polígono de frecuencias).



A partir de la tabla o de la gráfica podemos decir que:

a) Se consideraron 10 países productores de petróleo

b) La U.R.S.S. es el país que extrajo mayor cantidad de petróleo en 1980 (611 millones de toneladas)

c) Cinco de los países incluídos pertenecen al continente asiático (URSS, Arabia Saudita, Irán, Indonesia y los Emiratos árabes Unidos); cuatro pertenecen al continente americano (E.E.U.U, México, Venezuela y Canadá); y, finalmente, uno (Reino Unido) pertenece al continente europeo.

d) México produjo en 1980, 133 Millones de toneladas de dicho energético, y -- sólo fue superado en producción por: La U.R.S.S, E.E.U.U. y Arabia Saudita. Por lo que: En América , fue el segundo productor de petróleo.

EJERCICIO:

De acuerdo a la tabla o gráfica anteriores contesta las preguntas siguientes:

a) ¿Qué países de América produjeron en 1980 menos cantidad de petróleo que - México?

____

b) ¿Cuál fue la diferencia de producción de petróleo en 1980, entre la U.R.S.S y México?

____

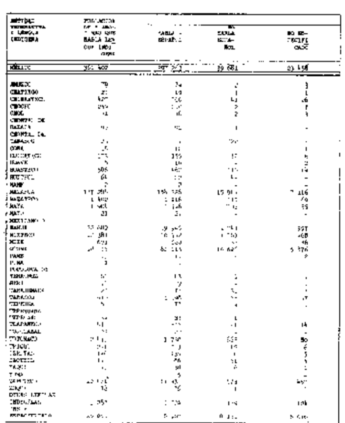
c) ¿Cuál fue la producción total de petróleo en 1980 de los 4 países de América incluídos?

____

¿Cuál la de los países de Asia? ______________________________

d) ¿Cuál fue la diferencia de producción de petróleo entre los países asiáticos y los países americanos? ______________________________

En la introducción, presentamos la tabla:



Esta tabla corresponde a la población - del Estado de México con una edad de 5 o más años que hablan alguna lengua indígena[1]/

A partir de los datos podemos obtener - la información siguiente:

[1]/ Tomado del X Censo General de Población y Vivienda.

a) El mazahua corresponde a la lengua indígena que más cantidad de personas - hablan en el Estado de México.

b) El otomí es la segunda lengua indígena que más cantidad de personas hablan en el Estado de México.

c) Otras lenguas indígenas que se hablan en el Estado de México son:

náhuatl, zapoteco y mixteco

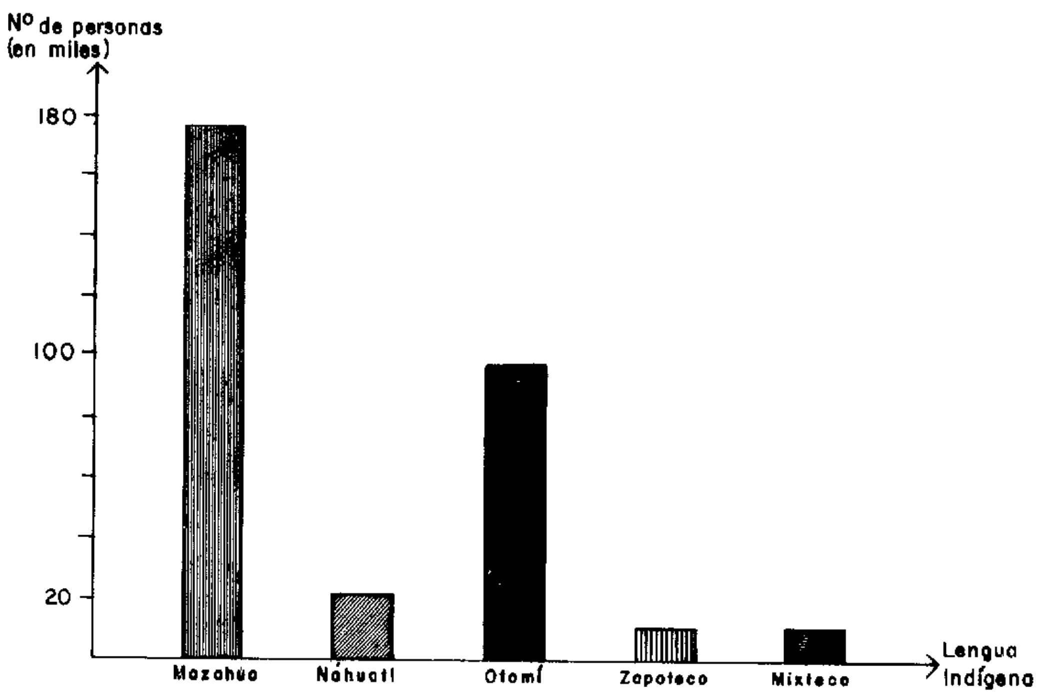
Si resumimos en una tabla esta información, tenemos:

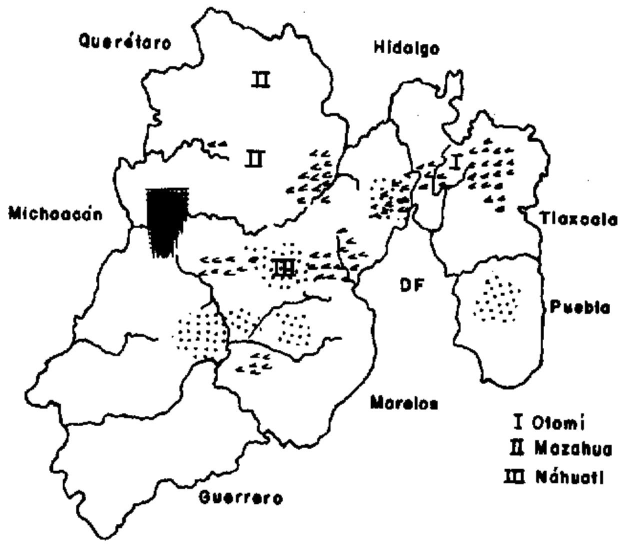
Las 5 lenguas indígenas que más se hablan en el Estado de México son:

Lengua indígena	Número de personas que la hablan
Mazahua	177,288
Nahuatl	22,689
Otomí	98,115
Zapoteco	12, 461
Mixteco	12,381

La gráfica de barra correspondiente a estos datos es:

Gráfica de barra correspondiente a las 5 lenguas indígenas que más se hablan en el Edo. de México.





EJERCICIO:

A. Con los datos contenidos en la tabla o la gráfica de barras ya expuestas - responde a las cuestiones siguientes, como en el ejemplo:

Ejemplo:

a) ¿Cuál es la razón existente entre las personas que hablan el mazahua y - de las que hablan el otomí, en el Edo. de México?

De la tabla tenemos que:

177 288 personas hablan mazahua y 98 115 personas hablan otomí. por lo que:

$$\frac{177\ 288 \text{ Mazahua}}{98\ 115 \text{ Otomí}} = 1.8$$

Es decir:

Casi el doble de la gente que hablban otomí, es la que habla mazahua.

b) ¿Cuál es la razón que existe entre las personas que hablan el otomí y de las que hablan el náhuatl, en la entidad? ____________

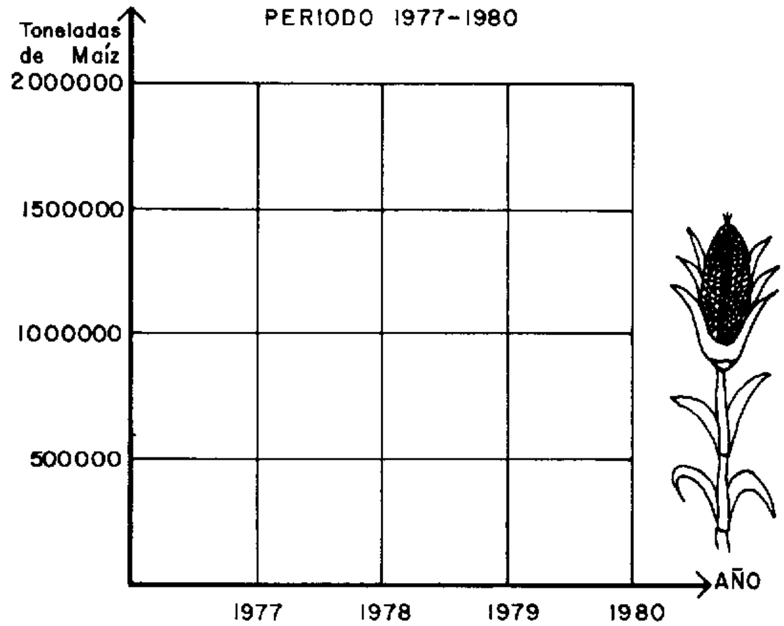
c) ¿Cuántas personas más, en 1980 hablan mazahua que otomí? ____________

d) ¿Cuántas personas más, en 1980 hablaban nahuatl que mixteco? ________

e) ¿Cuántas personas más, en 1980 hablaban otomí que zapoteco? __________

B. Con los datos de la tabla 1 del anexo, completa la siguiente gráfica.

Producción en Toneladas de maíz en el período 1977-80 en el Edo.de México.

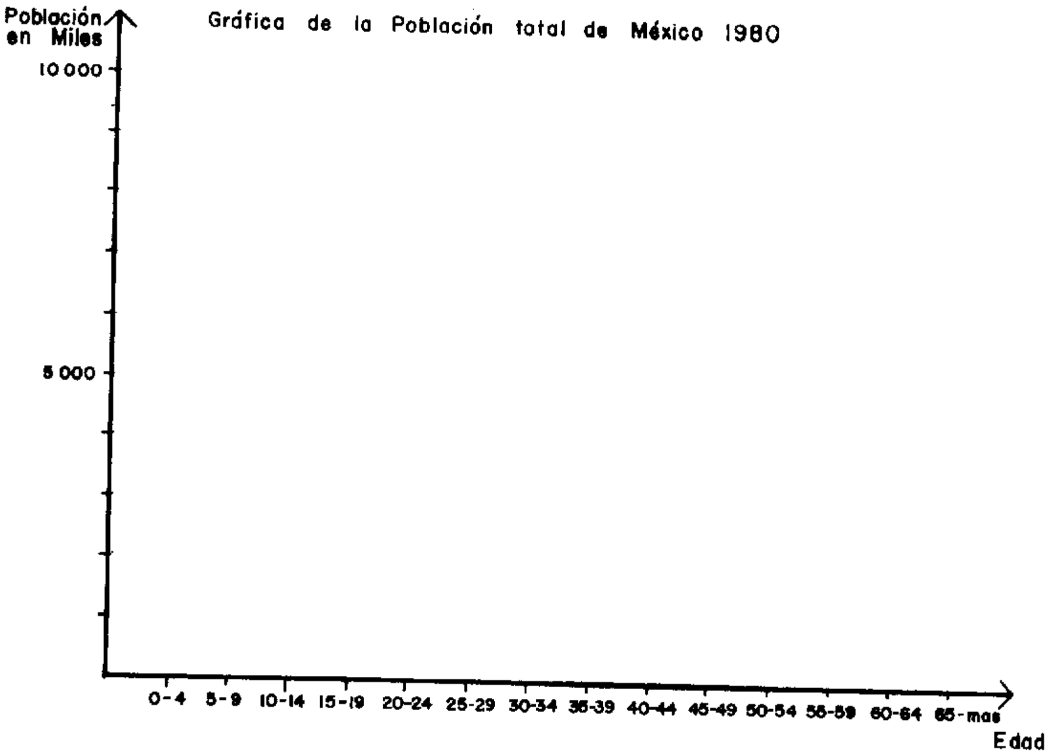


C. La siguiente tabla corresponde a la población por grupos de edad en toda la República Mexicana.

1980	TOTAL
Edad.	69 346.9 en miles
0-4	11 195.7
5-9	10 613.2
10-14	9 301.4
15-19	7 727.8
20-24	6 165.5
25-29	4 776.0
30-34	3 867.9
35-39	3 362.3
40-44	2 859.6
45-49	2 324.7
50-54	1 876.1
55-59	1 499.4
60-64	1 112.3
65 y más	2 665.0

Elabora la gráfica de frecuencias correspondiente.

FUENTE: Cifras preliminares del X Censo General de Población, corregidas por subnumeración proyectada al 30 de junio de 1980. Consejo Nacional de Población.



Con la gráfica anterior contesta las preguntas:

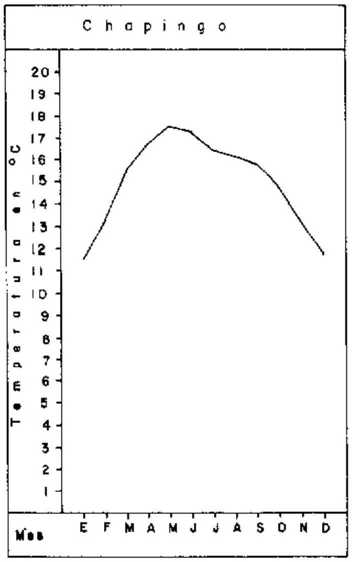
a) ¿Cuál es el intervalo de edad de mayor frecuencia? ____________

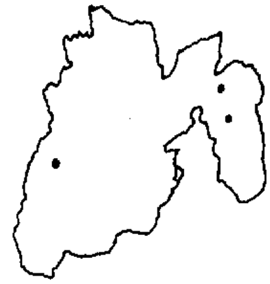
b) ¿Cuál es el intervalo de edad de menor frecuencia? ____________

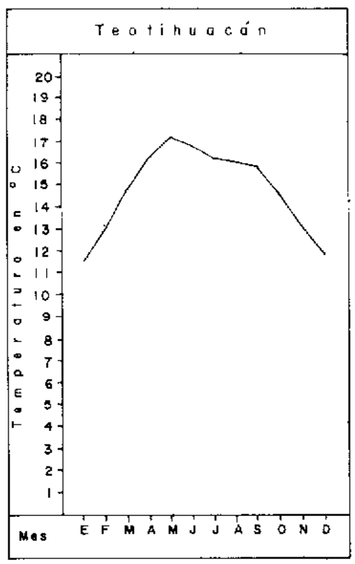
c) Si consideramos la población con edad arriba de los 45 años y la comparamos con la población de edad -- menor a 5 años ¿Cuál de las dos poblaciones es mayor? ____________

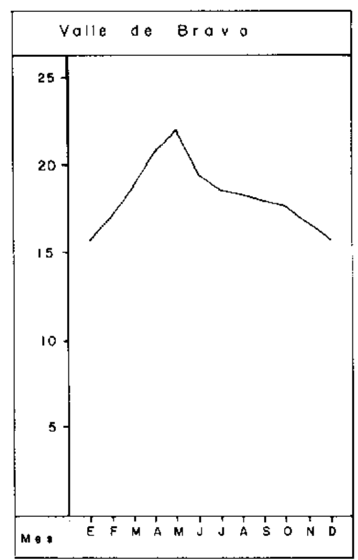
INTERPRETACION DE GRAFICAS

Otro problema que trata la Estadística es la interpretación de gráficas. A continuación se presentan tres gráficas con respecto a la variación de temperatura media por mes durante un año en tres poblados del Estado de México.









Según las gráficas:

a) ¿Cuál es el mes con una temperatura media máxima? ________________

b) ¿Cuáles son los meses con una temperatura media mínima? ______________

c) ¿Cuál es la media aritmética de las temperaturas en cada uno de los lugares mencionados?. ______________

Ejemplo:

Para Chapingo:

$$\text{Temperatura media} = \frac{\text{suma de temperaturas}}{12} =$$

$$= \frac{11.6+13.2+15.5+16.8+17.7+17.4+16.5+16.3+15.1+14.8+13.1+11.7}{12} = \frac{179.7}{12} = 19.9$$

Para Teotihuacan:

$\text{Media} = \frac{\Sigma\ x}{12} =$ ______________________________

Para Valle de Bravo:

$\text{Media} = \frac{\Sigma\ x}{12} =$ ______________________________

De acuerdo a las 3 gráficas anteriores y las medias aritméticas calculadas, contesta las preguntas siguientes.

1. ¿Cuál crees que sea el mes más caluroso del año en el Estado de México?

   ____

2. ¿Cuál crees que sea aproximadamente la temperatura media anual en el Estado de México?

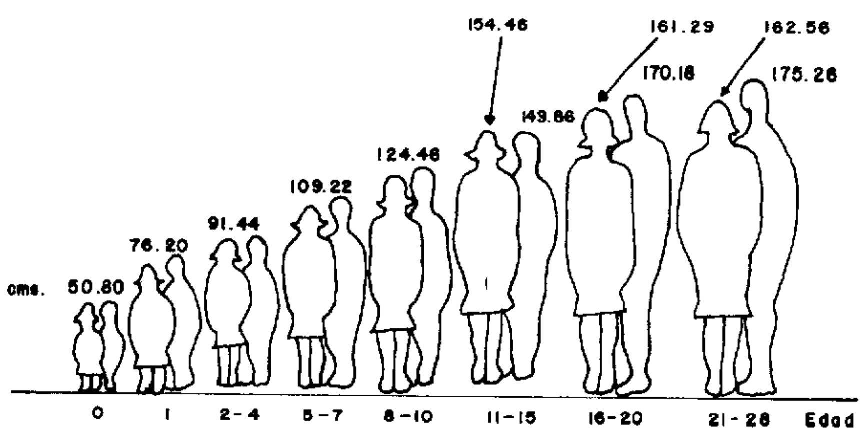
   ____

3. ¿Cuáles crees que sean los meses más fríos del año en el Estado de México?

   ____

4. Utiliza la tabla 3 del anexo para "verificar" tus respuestas a los incisos anteriores.

En tu primer curso, estudiaste otro tipo de gráfica llamada pictograma. La siguiente gráfica es un ejemplo de este tipo y corresponde al crecimiento del ser humano desde que nace hasta que cumple 28 años de edad.

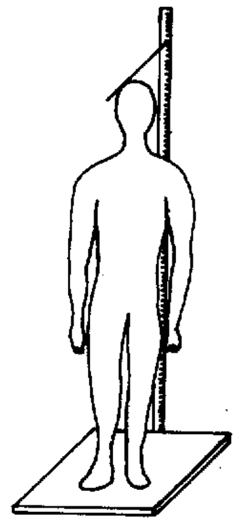


De acuerdo a la gráfica contesta lo siguiente:

a) ¿Cuál crees que sea aproximadamente la estatura promedio de los alumnos de tu grupo? ______________________

b) Considera los alumnos de tu grupo y conforme al número de lista registra -- sus estaturas en la siguiente tabla de registro:

No.lista	Nombre	Estatura en cms.
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
⋮		
60		



c) Con los datos de la tabla anterior, calcula la estatura promedio de los alumnos de tu grupo.

$$\text{media} = \frac{\text{suma de estaturas}}{\text{total de alumnos}} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

d) ¿Coinciden las respuestas de los incisos (a) y (c)? ______________________

Si tu respuesta es negativa ¿cuáles crees que sean las razones? __________

____

e) ¿Cuál es la moda de los datos (es decir, el dato de mayor frecuencia que registraste en la tabla del inciso b)? ______________________

EJERCICIO:

Analiza las gráficas referentes a la variación de temperatura durante los meses del año, de Colombia y Alaska; presentadas en el anexo, y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Se parecen las gráficas? ______________________

b) ¿Cuál es la temperatura máxima en Alaska? ______________________

c) ¿Cuál es la temperatura mínima en Alaska? ______________________

d) ¿En qué mes se registra la temperatura más - alta en Alaska? ______________________

e) ¿En qué mes se registra la temperatura más - baja en Alaska? ______________________

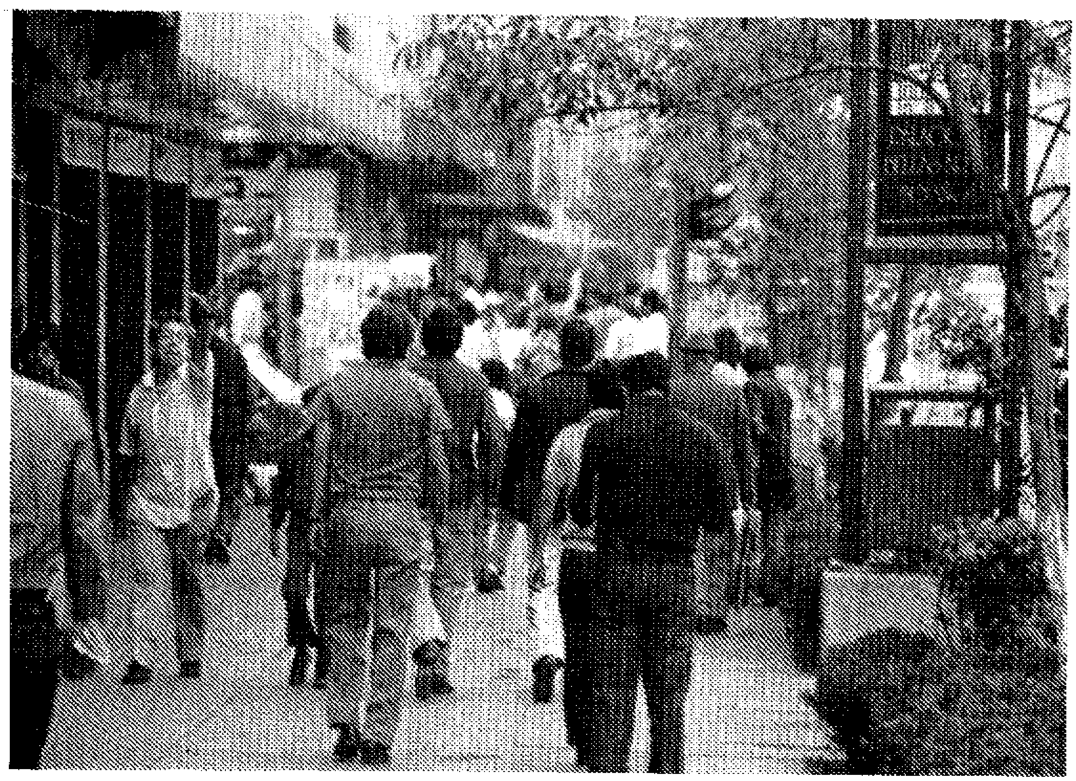
f) ¿Cuál es la temperatura máxima en Colombia? ______________________

g) ¿Cuál es la temperatura mínima en Colombia? ______________________

h) ¿En qué mes se registra la temperatura más - alta en Colombia? ______________________

i) ¿En qué mes se registra la temperatura más - baja en Colombia? ______________________

j) Si te dieran a escoger en cuál de los lugares te gustaría vivir ?cuál sería tu respuesta? ______________ ¿Por qué? ______________________________



APLICACION DE FORMULAS DE PROBABILIDAD.

En tu segundo curso estudiamos que:

a) La probabilidad de la unión de dos eventos se calcula de acuerdo a la fórmula.

(1) $$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

b) La probabilidad del complemento de un evento se calcula con la fórmula

(2) $$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

De (1), tenemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

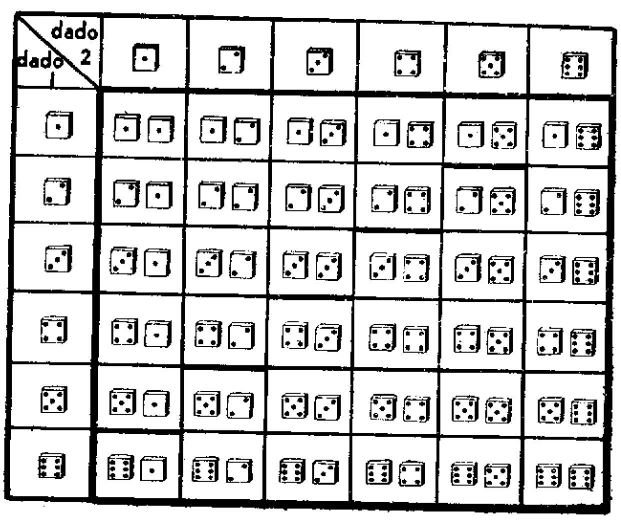
Así que:

c) La probabilidad de la intersección de los eventos se calcula de acuerdo a la fórmula:

(3) $$\boxed{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

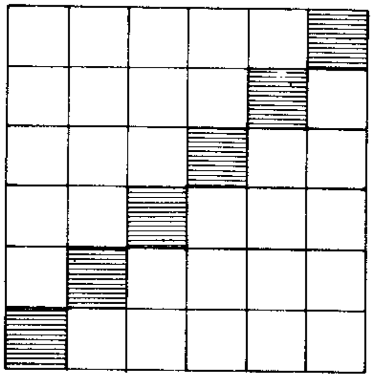
A continuación hacemos uso de las fórmulas anteriores para calcular las probabilidades de eventos compuestos.

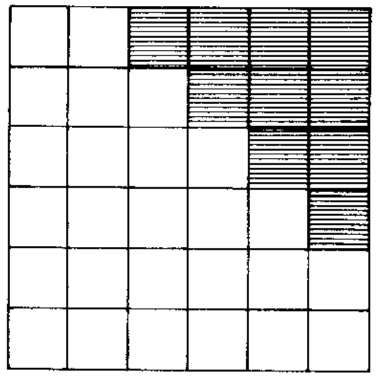
La gráfica cartesiana:

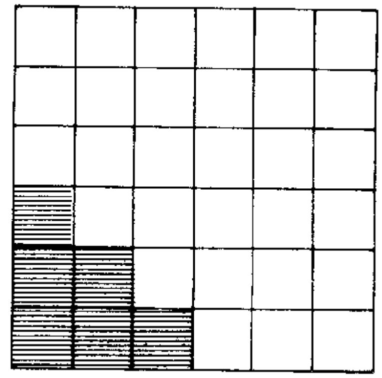


representa el espacio muestral en el lanzamiento de dos dados.

Las siguientes gráficas representan los eventos indicados en cada una de ellas.







A = "Obtener el mismo número de cada dado"

B = "Obtener una suma mayor que 8"

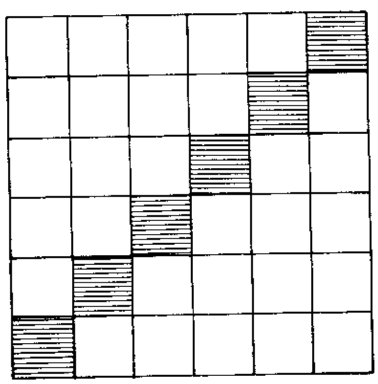
C = "Obtener una suma menor que 5"

De acuerdo a la fórmula para calcular la probabilidad teórica de un evento tenemos:

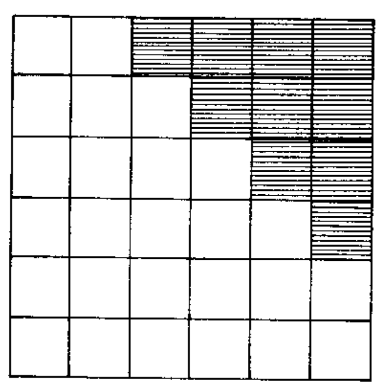
$$P\ (E) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles.}}$$

Por lo tanto:

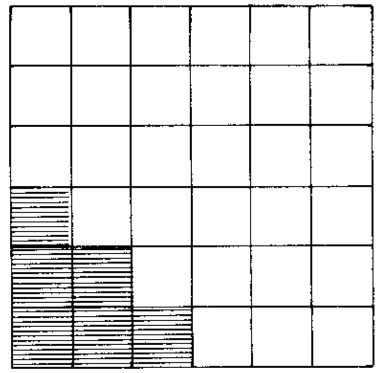
a) $P\ (A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$



b) $P\ (B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

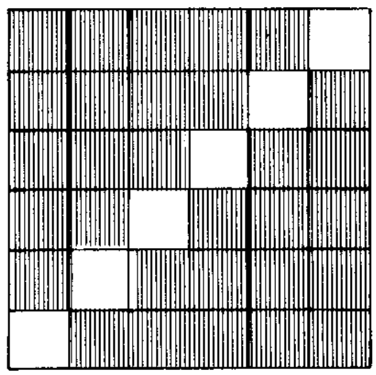


c) $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

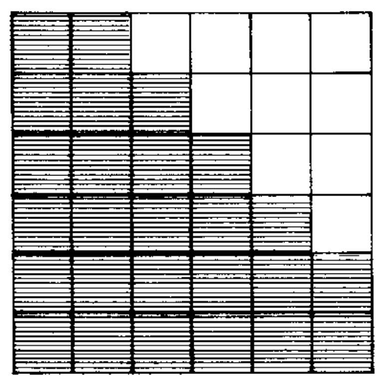


De igual manera:

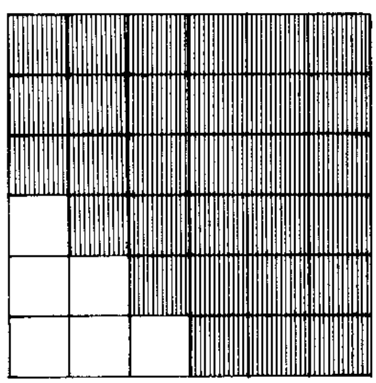
$P(A^c) = \frac{30}{36}$



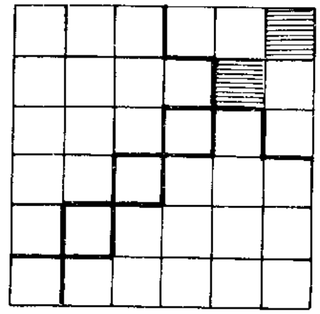
$P(B^c) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$



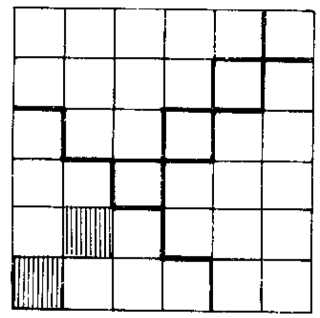
$P(C^c) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

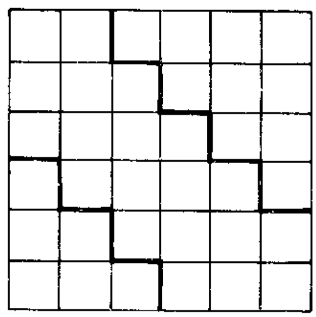


$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$



$P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$





$P(B \cap C) = \frac{0}{36} = 0$

A y B no son excluyentes porque $A \cap B \neq \emptyset$

A y C no son excluyentes porque $A \cap C \neq \emptyset$

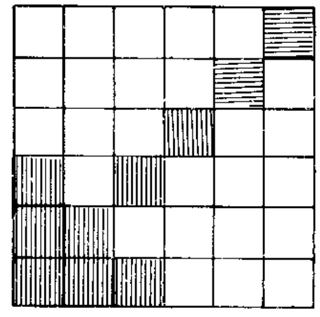
B y C sí son excluyentes porque $B \cap C = \emptyset$

¿Cuál será la probabilidad de la unión de A y C?

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

Por lo que:

$$P(A \cup C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{3 + 3 - 1}{18} = \frac{5}{18}$$



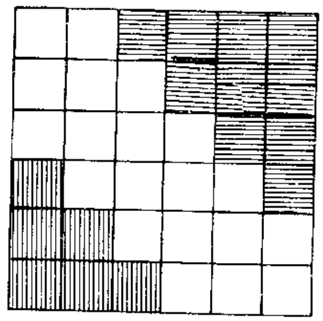
$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

¿Cual será la probabilidad de la unión de B y C?

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

Por lo tanto:

$$P(B \cup C) = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{5+3}{18} = \frac{8}{18} = \frac{16}{36}$$

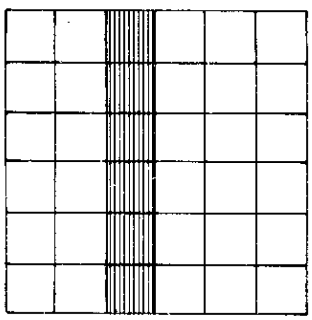


$\frac{16}{36}$

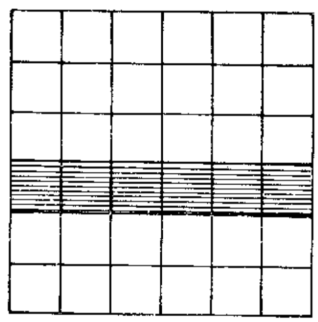
EJERCICIOS:

En el lanzamiento de dos dados, donde cada figura representa un evento.

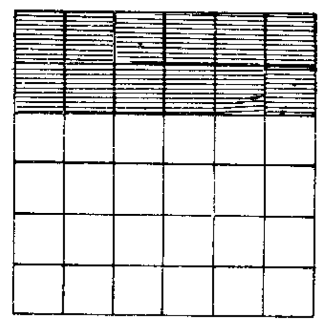
Es decir:



evento X



evento Y



evento Z

Calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X) =$

b) $P(Y) =$

c) $P(Z) =$

d) $P(X \cap Z) =$

e) $P(Y \cup Z) =$

f) $P(Z \cap Y) =$

g) $P(X^c) =$

h) $P(X \cup Y) =$

i) $P(Y^c) =$

j) $P(X \cap Y) =$

h) $P(Y^c \cup Z^c) =$

A N E X O

TABLA N° 1

ESTADO DE MEXICO

CARACTERISTICAS DE LA PRODUCCION AGRICOLA SEGUN CULTIVOS PRINCIPALES 1977-1979/80

Concepto	1977/78			1978/79			1979/80		
	Superficie cosechada Has.	Producción toneladas	Valor miles de pesos.	Superficie cosechada Has.	Producción toneladas	Valor miles de pesos	Superficie cosechada Has.	Producción toneladas	Valor miles de pesos
Cultivos									
Ajonjolí	900	630	3 780	3 476	2 502	20 016	1 300	940	11 280
Arroz palay	250	750	3 150	498	612	3 182	426	1 491	10 437
Cacahuate	1 250	1 187	9 496	2 128	1 830	15 555	1 550	1 860	22 320
Cebada en grano	23 552	34 785	85 942	21 117	28 950	70 384	27 755	48 862	123 699
Cebolla	398	2 174	4 349	588	5 987	18 326	1 606	24 080	145 752
Chícharo verde	7 904	29 273	166 445	4 999	13 590	79 758	11 513	39 767	245 431
Frijol	33 195	25 505	300 348	10 495	9 182	110 579	13 760	13 600	232 089
Maíz	673 389	1 072 900	3 111 476	520 422	1 253 984	4 363 673	677 411	1 813 280	9 065 960
Papa	11 751	146 557	697 533	13 018	83 716	283 760	19 022	243 055	1 721 207
Sandía	100	1 050	2 625	2	31	79	N.D.	N.D.	N.D.
Tomate rojo (jitomate)	388	2 677	17 190	397	3 648	19 914	338	2 324	16 725
Trigo	3 449	4 217	15 962	2 973	4 411	14 137	6 583	17 483	93 362
Frutales y plantaciones									
Aguacate	2 734	25 102	335 057	2 970	31 226	415 930	2 970	39 950	719 100
Alfalfa verde	21 150	1 353 600	273 426	21 115	1 252 080	513 353	22 844	1 650 359	866 438
Café oro	250	34	1 428	394	73	3 154	391	55	2 668
Caña de azúcar	560	33 600	64 747	131	3 514	7 028	-	-	-
Guayaba	420	4 298	14 789	493	4 806	22 108	966	8 068	48 408
Limón agrio	170	1 220	4 880	308	1 592	6 846	2 965	16 364	51 820
Mango	264	2 988	17 928	264	1 532	9 759	222	1 598	12 624
Manzana y perón	1 108	10 609	59 697	1 034	9 862	72 183	1 053	9 372	93 720
Naranja	280	2 880	17 280	314	3 286	9 858	860	10 431	40 681
Papaya	45	825	1 650	133	2 128	6 171	133	2 606	9 121
Platano diversas variedades.	261	2 658	4 784	284	1 426	2 852	608	3 744	7 488

FUENTE: Anuario Estadístico de los Estados Unidos Mexicanos (1983)

TABLA Nº 2

ESTADO DE MEXICO
POBLACION ECONOMICAMENTE ACTIVA Y RAMA DE ACTIVIDAD ECONOMICA SEGUN GRUPOS DE INGRESO MENSUAL

ENTIDAD FEDERATICA Y RAMA DE ACTIVIDAD ECONOMICA	POBLACION ECONOMICAMENTE ACTIVA	GRUPOS DE INGRESO MENSUAL									
		NO RECIBE INGRESOS.	1 A 590 PESOS	591 A 1080 PESOS	1 081 A 1 970 PESOS	1971 A 3610 PESOS	3 611 A 6 610 PESOS	6 611 A 12 110 PESOS	12 111 A 22 170. PESOS	22 171 PESOS Y MAS.	NO ESPECIFICADO
	2 410 236	359 993	52 159	69 640	96 569	247 092	673 593	326 498	107 326	66 844	410 522
AGRIC.GANAD.CAZA.ETC	367 888	149 654	20 141	18 306	20 351	37 706	20 248	5 546	1 408	1 098	93 430
EXPLOT.DE MINAS Y CANTERAS	4 115	219	35	68	116	500	971	725	500	549	432
INDUSTRIAS MANUFACTURERAS	505 855	31 778	5 106	7 764	12 961	43 293	200 639	79 961	25 019	17 626	81 708
ELECTRICIDAD GAS Y AGUA	8 718	263	26	45	62	224	1 117	3 037	2 178	1 163	603
CONSTRUCCION	138 731	11 187	1 905	3 604	5 005	20 146	52 338	14 067	3 569	2 748	24 162
COMERCIO MAYOREO Y MENUDEO	245 000	28 185	5 183	7 936	9 477	31 786	65 235	32 194	12 344	8 962	43 698
TRANSPOTE,COMUNICACIONES	194 705	7 797	971	1 510	2 356	9 514	37 598	21 343	5 320	2 436	15 860
ESTABLEC.FINANCIEROS ETC.	45 736	1 878	165	263	453	1 748	9 861	13 472	6 913	6 089	4 894
SERVICIOS COMUNALES ETC.	332 344	27 364	6 055	12 885	23 434	39 494	79 884	61 270	20 750	9 853	50 355
ACTIVIDADES INSUF.ESPECIF.	642 424	95 278	12 345	16 057	22 228	62 438	205 429	94 822	29 312	16 314	88 201
DESOCUP.NO HAN TRABAJADO	14 729	6 390	227	202	126	243	273	61	13	6	7 179

FUENTE: X Censo General de Población y Vivienda.

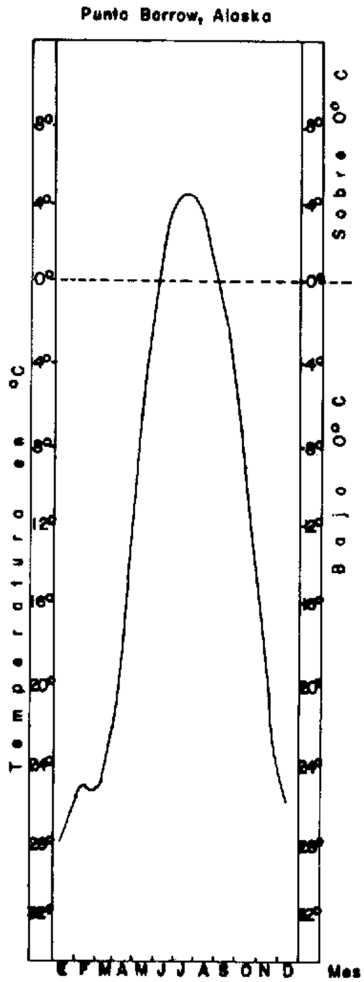
TABLA Nº 3

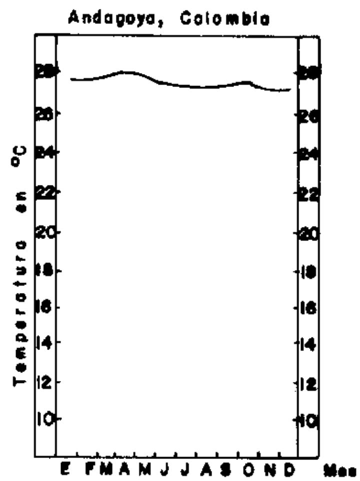
TEMPERATURA MEDIA MENSUAL DURANTE UN AÑO DE VARIOS LUGARES DEL ESTADO DE MEXICO

LUGAR	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
ACATITLAN	21.3	22.7	24.9	27.0	26.2	24.9	23.3	23.3	23.1	22.6	22.4	21.1
ALMOLOYA DEL RIO	9.5	10.8	12.1	13.7	14.6	15.1	14.4	14.3	14.3	13.4	11.5	10.1
ATLACOMULCO	10.2	11.4	13.6	15.1	16.0	16.1	15.3	15.4	14.9	13.7	12.2	10.6
CHAPINGO	11.0	13.2	15.5	16.8	17.7	17.4	16.5	16.3	15.9	14.8	13.1	11.7
IXTLAHUACA	12.1	13.0	14.2	15.9	16.4	17.6	16.1	16.4	16.4	14.9	13.5	12.0
MALINALCO	17.0	17.9	19.7	21.9	21.9	21.4	20.3	20.5	20.3	19.4	19.3	17.8
EL ORO	10.1	10.7	13.2	14.2	14.1	14.3	13.4	13.4	13.0	12.1	10.8	9.9
TEOTIHUACAN PRITAMIDES	11.5	13.0	14.8	16.2	17.2	16.8	16.3	16.1	15.9	14.6	13.1	11.9
VALLE DE BRAVO PRESA	15.6	16.7	19.0	20.7	21.3	19.5	18.6	18.5	18.4	18.2	16.9	15.6
VILLA VICTORIA PRESA	10.4	10.7	11.8	13.3	14.5	15.8	15.1	15.0	15.1	14.0	12.2	10.4

FUENTE: Modificaciones al Sistema de Clasificación Climatica de KOPPEN. México, 1981.

ENRIQUETA GARCIA.


Punta Barrow, Alaska
Temperatura en °C
Sobre 0° C
Bajo 0° C
8°
4°
0°
4°
8°
12°
16°
20°
24°
28°
32°
E F M A M J J A S O N D
Mes


Andagoya, Colombia
Temperatura en °C
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
E F M A M J J A S O N D
Mes

IMPRESO EN corporación LITOMEX S.A. de C.V. TEL. 6-14-44. TOLUCA, MEX.